ANALYYSIN HARJOITUSTYÖ

MAIJA MATEMAATIKKO

Tehtävä 86. Oletetaan, että funktio $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ on derivoituva origossa ja $f(0) = 0$. Asetetaan $f_n(x) = nf(x/n)$, kun $x \in [-1, 1]$ ja $n = 1, 2, \ldots$. Osoita, että (f_n) suppenee tasaisesti välillä $[-1, 1]$.

Ratkaisu. Koska funktio f on derivoituva origossa ja $f(0) = 0$, niin on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = a.$$

Kun määritellään

$$F(x) = \frac{f(x)}{x}, \ x \in [-1, 1] \text{ ja } x \neq 0,$$

niin $F(x)$ siis lähestyy raja-arvoa a, kun x lähestyy arvoa 0 ja $x \neq 0$. Tällöin jokaiselle jonolle (x_n), jossa $x_n \neq 0$ ja $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, on voimassa $\lim_{n \to \infty} F(x_n) = a$.

Kun asetetaan $x_n = x/n$, jos $x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$ ja $n = 1, 2, \ldots$, niin $\lim_{n \to \infty} x/n = 0$, joten

$$a = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} F\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x/n)}{x/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{x} f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Saadaan siis

$$\lim_{n \to \infty} nf\left(\frac{x}{n}\right) = ax, \text{ kun } x \in [-1, 1] \text{ ja } x \neq 0.$$

Kun $x = 0$, niin

$$\lim_{n \to \infty} nf\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} nf\left(\frac{0}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} nf(0) = \lim_{n \to \infty} n \cdot 0 = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} nf\left(\frac{x}{n}\right) = ax \text{ kaikilla } x \in [-1, 1].$$

Kun merkitään $g(x) = ax$, niin (f_n) suppenee pisteittäin kohti raja-funktiota g.

On osoitettava, että (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota g. Koska

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(h)}{h} - a \right| = 0,$$

niin jokaista lukua $k > 0$ vastaa sellainen luku $m > 0$, että

$$\left|\frac{f(h)}{h} - a\right| < k, \text{ kun } 0 < |h| < m.$$

Tällöin kaikilla $x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$, on

$$\begin{aligned} \left|nf\left(\frac{x}{n}\right) - ax\right| &= |x| \left|\frac{n}{x} f\left(\frac{x}{n}\right) - a\right| = |x| \left|\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} - a\right| \\ &\leq \left|\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} - a\right| < k, \end{aligned}$$

kun $0 < \left|\frac{x}{n}\right| < m$, eli kun $n > \left|\frac{x}{n}\right|$. Kun $|x| \leq 1$, niin $\left|\frac{x}{m}\right| \leq \frac{1}{m}$, joten

$$\sup_{x \in [-1,1]} \left|nf\left(\frac{x}{n}\right) - ax\right| < k, \text{ kun } n > \frac{1}{m}.$$

Siis

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in [-1,1]} \left|nf\left(\frac{x}{n}\right) - ax\right| \right) = 0,$$

joten (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota g. $\square$