YLIOPISTOMATEMATIIKKA AINEENOPETTAJAN NÄKÖKULMASTA (SYKSY 2016)

PBL-CASE 2: VEKTORIT

Antti Aineenopettaja pääsi matematiikan ja tilastotieteen laitokselle opiskelemaan matematiikan aineenopettajaksi, mikä oli hänelle mieluisa vaihtoehto, sillä koki oppineensa matematiikkaa koulussa hyvin ahkeran opiskelunsa myötä (matematiikka oli hänen vahvin kouluaineensa, yleensä 9 tai 10). Lisäksi opetustyö tuntui hänestä hyvältä uravalinnalta; hän piti jo koulussa siitä, kun sai auttaa muita oppilaita tehtävissä.

Yliopistossa yhtenä ensimmäisistä kursseistaan hän opiskeli kurssin ”Lineaarialgebra ja matriisilaskenta”. Kurssilla oli lähtötasotesti, joka käsitteli vektoreita. Näin ollen Antti päätteli, että kurssi tulisi liittymään jollakin tavalla lukiossa opetettuihin vektoreihin ja hän kertasikin nopeasti pääkohdat lukion vektorikurssista.

Antti käsitti vektorit lukion pohjalta nuolina eli olioina, joilla on suunta ja suuruus. Hyvänä esimerkkinä käytännön esimerkkinä hän muisti joen virtauksen, joka vie venettä tiettyyn suuntaan tietyllä voimalla. Tällaisia kutsuttiin vektorisuureiksi, joita oli mukava laskea. Eritoten kun niitä tarkasteltiin koordinaatistossa, jossa vektori esitettiin esimerkiksi muodossa 3i + 4j. Vektoreiden yhteenlaskun ja vakiolla kertomisen Antti ymmärsi hyvin. Yksi oudompi laskutoimitus oli pistetulo, joka määriteltiin kaavalla $a \times b = |a| \times |b| \times \cos \alpha$, missä α on vektoreiden a ja b välinen kulma. Pistetulosta Antti oppi, että kahden vektorin pistetulo on nolla silloin, kun vektorit ovat toisiaan vasten kohtisuorassa.

Lineaarialgebran kurssilla käsiteltiin myös vektoreita, mutta nyt vektorit esitettiin pistepareina, esim. (3,6) tai pistejoukkoina, esim. (2,-3,4,1,-3). Kahden vektorin pistetulo määriteltiin kaavalla, $a \times b = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \ldots + a_n \times b_n$, eli laskemalla vektoreiden komponenttien tulot ja laskemalla ne yhteen. Vektorit olivat Antin mielestä tällä kurssilla jotenkin erilaisia kuin lukiossa; lukiossa esimerkiksi pisteen (3,6) paikkavektoriksi sanottiin vektoria 3i + 6j, nyt itse piste (3,6) oli vektori. Pian edettiin matriiseihin, jotka tuntuivat taas Antista harppaukselta johonkin uuteen. Lineaarialgebran kurssi meni lopulta Antilla hyvin ja hän koki oppineensa asioita, joskin kokonaisuus jäi osittain hajanaiseksi.

Myöhemmin opinnoissaan Antti törmäsi myös siihen, miten vektori voidaan määritellä tarkasti myös geometrisesti keskenään yhtenevien suuntajanojen ekvivalenssiluokkana. Nyt Antilla oli useita eri tapoja lähestyä vektoreita ja kokonaisuus alkoi hahmottua.

Opetusharjoittelussa Antti pääsi opettamaan lukion vektorikurssia. Hän kävi läpi oppikirjaa, jossa aluksi vektoreita esitettiin yleisesti geometrisina otuksina ja fysikaalisten sovellusten kautta. Pian siirryttiin laskemaan vektoreilla koordinaatistossa. Antin oli määrä pitää oppitunteja liittyen mm. vektorin käsitteeseen, vektoreiden laskusääntöihin, vektoreiden esittämiseen kantavektoreiden avulla ja pistetuloon.

Antti mietti, että hänellä on kokonaisuus hallussa kohtuullisen hyvin, mutta vieläkin jotkut asiat olivat vähän epäselviä. Hän mietti mm., miten ”geometriset vektorit” ja ”koordinaatistovektorit” liittyvät toisiinsa, mikä pistetulo oikeastaan on, käytetäänkö lineaarialgebraa jossakin muussakin kuin fysiikassa ja mihin matematiikan aloihin lineaarialgebra oikeastaan liittyy. Hän tiesi, että hän selviäisi opetusharjoittelusta, vaikkei osaisikaan vastata tarkasti edellisiin kysymyksiin, mutta olo tuntui silti hieman epävarmalta: kokonaisuuden hahmottamisessa oli vielä aukkoja!