

YLIOPISTOMATEMATIIKKA AINEENOPETTAJAN NÄKÖKULMASTA (SYKSY 2016)

LOGIIKKA JA TODISTAMINEN: POHDINTACASE 1

Mietitään seuraavaa tehtävää: "Määritä funktion $f(x) = \sqrt{5-2x} + 2x - 3$ nollakohdat". Eräässä lukion oppikirjassa esitettiin tehtävälle kaksi ratkaisutapaa. Aluksi selvitetään funktion $f(x) = \sqrt{5-2x} + 2x - 3$ määrittelyjoukko seuraavalla päättelyllä:

$$\begin{aligned} 5 - 2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -5 && | : (-2) < 0 && \text{Epäyhtälön suunta vaihtuu.} \\ x &\leq \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Tämän jälkeen korotetaan yhtälön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ molemmat puolet potenssiin kaksi. Korotuksen jälkeen tarkastelu jakautuu kahteen ratkaisutapaan.

Tapa 1: tarkastamismenetelmä. Tarkastamismenetelmässä yhtälön mahdollisiksi ratkaisuisi saadaan $x = 2$ tai $x = 1/2$, joiden molempien todetaan kuuluvan funktion määrittelyjoukkoon. Sijoittamalla juuret yhtälöön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ huomataan kuitenkin, että juuri $x = 2$ ei toteuta yhtälöä, mutta juuri $x = 1/2$ toteuttaa.

Tapa 2: neliöönkorotusehto. Toisessa selvitetään millä luvuilla x yhtälön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ oikea puoli on epänegatiivinen seuraavalla päättelyllä:

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -3 && | : (-2) < 0 \\ x &\leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Näin yhtälön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ neliöönkorotusehdoksi saadaan $x \leq 3/2$. Saaduista juurista vain $x = 1/2$ toteuttaa neliöönkorotusehdon.

RYHMÄSSÄ POHDITTAVAA:

1. Mihin esitetyt ratkaisutavat perustuvat?
2. Mitä asioita opiskelijan tulee entuudestaan hallita, jotta esitetyn esimerkin voi ymmärtää?
3. Muokatkaa tehtävää
 - a. helpommaksi.
 - b. vaikeammaksi.
4. (Pohtikaa tuliko edellisessä tehtävän muunnelmassa jotakin oleellista uutta tai katosiko esimerkiksi jotakin oleellista?)