Lukualueet – mitä luvut ovat?

1 Johdanto

Lähestymme kurssilla lukualueita aineenopettajan näkökulmasta, jolle pohjana (linkityksessä ”ylhäältä alaspäin”) voi katsoa olevan lukualueiden matemaattinen teoria. Niiden perusteet löytyvät esimerkiksi seuraavista lähteistä:

- Lauri Myrberg: Algebra : korkeakouluja varten
- Jukka Kemppainen: Koulumatematiikan perusteet, Oulun yliopisto

Tässä materiaalissa keskitytään kyseisten aiheiden matemaattisten perusteiden *keskeisiin ajatuksiin* eikä todistuksia juurikaan esitetä. Yksityiskohtien täydentämiseksi voikin tutustua edellä mainittuihin lähteisiin.

2 Lukualueet koulussa

Luonnollisilla luvuilla, kokonaisluvuilla ja rationaaliluvuilla lasketaan koulumatematiikassa jo peruskoulun alaluokilla. Reaalilukujen kokonaisuuskin tulee mukaan melko varhaisessa vaiheessa (ainakin ”salakavalasti”) esimerkiksi geometrian myötä. Lukualueita on mahdollista tietysti laajentaa vielä kompleksilukuihin (ja siitäkin eteenpäin).

Lukualueisiin liittyy oppimistutkimuksen näkökulmasta muun muassa ns. käsitteellisen muutoksen problematiikkaa. Myöskään matematiikan teorian näkökulmasta ei ole täysin itsestään selvää, miten esimerkiksi luonnolliset luvut määritellään. Katsotaan tässä, miten luonnolliset luvut voidaan matematiikassa määritellä ja miten lukualuetta voidaan askel kerrallaan laajentaa ekvivalenssirelaatioiden avulla.

3 Luonnolliset luvut

Luonnolliset luvut (tässä $0, 1, 2, 3\ldots$) voidaan määritellä matematiikassa esimerkiksi joukko-opillisen konstruktion avulla tai ns. Peanon aksioomilla. Katsotaan seuraavaksi lyhyesti nämä molemmat tavat.

3.1 Joukko-opillinen konstruktio

Voidaan ajatella, että esimerkiksi luvun 2 tulisi olla se ominaisuus, joka kahden alkion joukoille on yhteistä. Tämä on kuitenkin selvästi kehämäinen määritelmä. Tarvitaan jokin joukko, joka *vastaisi lukua* 2.

Sanotaan, että ”tyhjästä on paha nyhjästä”, mutta luonnollisten lukujen joukko-opillisessa konstruktiossa lähdetään liikkeelle tyhjästä joukosta: sillähän ei ole yhtään alkiota ja se vastaa silloin luontevasti lukua 0. Vastaavasti taas joukolla $\{\emptyset\}$ on taas alkionaan tyhjä joukko, jolloin tämä joukko vastaisi luontevasti lukua 1.

Luonnolliset luvut voidaan siis määritellä seuraavalla idealla:

- luvun 0 määrittelee joukko $\emptyset$,
- luvun 1 määrittelee joukko $\{\emptyset\}$,
- luvun 2 määrittelee joukko $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$,
- luvun 3 määrittelee joukko $\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$,
- jne.

Nyt minkä tahansa joukon A alkioiden lukumäärän voidaan sanoa olevan 2, jos ja vain jos on olemassa bijektio joukolta A joukolle $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$. Toisin sanoen, luku 2 on se ominisuus, joka yhdistää niitä joukkoja, joilta on olemassa bijektio joukolle $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$. Tarkkana määritelmänä luvulle 2 voidaan siis antaa niiden joukkojen luokka, jotka ovat yhtä mahtavia kuin joukko $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$.

Luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolasku määriteltäisiin joukkojen yhdistämisen ja karteesisen tulon avulla, mutta ei katsota sitä tässä tarkemmin.

3.2 Peanon aksioomat

Toinen tunnettu vaihtoehto on määritellä luonnolliset luvut Peanon aksioomien avulla. Määrittelyssä käytetään apuna seuraajafunktiota s, jonka ideana on se, että jokaisella luonnollisella luvulla on täsmälleen yksi seuraaja (esim. luvun 45 seuraaja on luku 46), joka ei voi olla minkään muun luonnollisen luvun seuraaja.

Voidaan määritellä, että luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on joukko, jolla on ominaisuudet:

(P1) $0 \in \mathbb{N}$.

(P2) Jos $n \in \mathbb{N}$, niin $s(n) \in \mathbb{N}$.

(P3) Jos $s(n) = s(m)$, niin $n = m$.

(P4) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee: $s(n) \neq 0$.

(P5) Jos joukon $\mathbb{N}$ osajoukolla S on ominaisuudet

- i) $0 \in S$ ja
- ii) $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$,

niin $S = \mathbb{N}$ (induktioaksiooma).

Koska lähtökohtaisesti ei ole takeita siitä, että nämä aksioomat toteuttava malli olisi olemassa, otetaan tässä aksioomaksi että:

(P6) On olemassa ehdot (P1) - (P5) täyttävä joukko $\mathbb{N}$.

Tällä määritelmällä saadaan määriteltyä sellainen joukko, jossa jokaisella joukon $\mathbb{N}$ alkiolla on yksikäsitteinen seuraaja ja jossa ”induktiotodistus toimii” eli ns. induktioperiaatte on ”leivottu määritelmän sisään”.

Miten sitten tässä joukossa voidaan määritellä laskutoimitukset? Esimerkikisi yhteenlasku määritellään kuvauksena joukolta $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ joukolle $\mathbb{N}$. Tämän kuvauksen pitäisi vastata ajatustamme siitä, että esimerkiksi $2 + 3 = 5$ eli järjestetty pari $(2, 3)$ kuvautuu yhteenlaskuvauksessa luvulle 5. Funktio $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ voidaankin määritellä rekursiivisesti seuraavasti:

(Y1) $+(m, 0) = m$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$ (eli $m + 0 = m$ kaikilla luonnollisilla luvuilla)

(Y2) $+(m, s(n)) = s(+(m, n))$ kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$ (eli $m + s(n) = s(m + n)$ kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$)

Jos merkitään $s(0) = 1$ ja $s(1) = 2$, voidaan hahmotella ideaa määritelmän takana:

- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 1 + s(0) = s(1 + 0) = s(1) = 2$
- jne.

Vastaavasti kertolaskua vastaava funktio $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ voidaan määritellä yhteenlaskun avulla rekursiivisesti seuraavasti:

(K1) $\cdot(m, 0) = 0$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$ (eli $m \cdot 0 = 0$ kaikilla luonnollisilla luvuilla)

(K2) $\cdot(m, s(n)) = s(\cdot(m, n) + m)$ kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$ (eli $m \cdot s(n) = m \cdot n + m$ kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$)

Idea määritelmän takana on, että esimerkiksi kertolasku $4 \cdot 6$ palautetaan laskuksi $4 \cdot 5 + 4$ jne.

Näillä määritelmillä saadaan toteutumaan kaikki tutut laskusäännöt (liitännäisyys, vaihdannaisuus ja osittelu). Yhteenlaskun suhteen kuitenkaan vasta-alkioita ei löydy ja algebralliselta rakenteeltaan luonnolliset luvut muodostavatkin vain monoidin.

4 Kokonaisluvut

Kokonaisluvut voidaan määritellä luonnollisten lukujen avulla tarkasti joukon $\mathbb{N}$ karteesisen tulon sekä sopivan ekvivalenssirelaation avulla. Palautellaan mieleen, että joukon $\mathbb{N}$ karteesisella tulolla tarkoitetaan yksinkertaisesti järjestettyjä pareja, joissa komponentit ovat luonnollisia lukuja. Siis

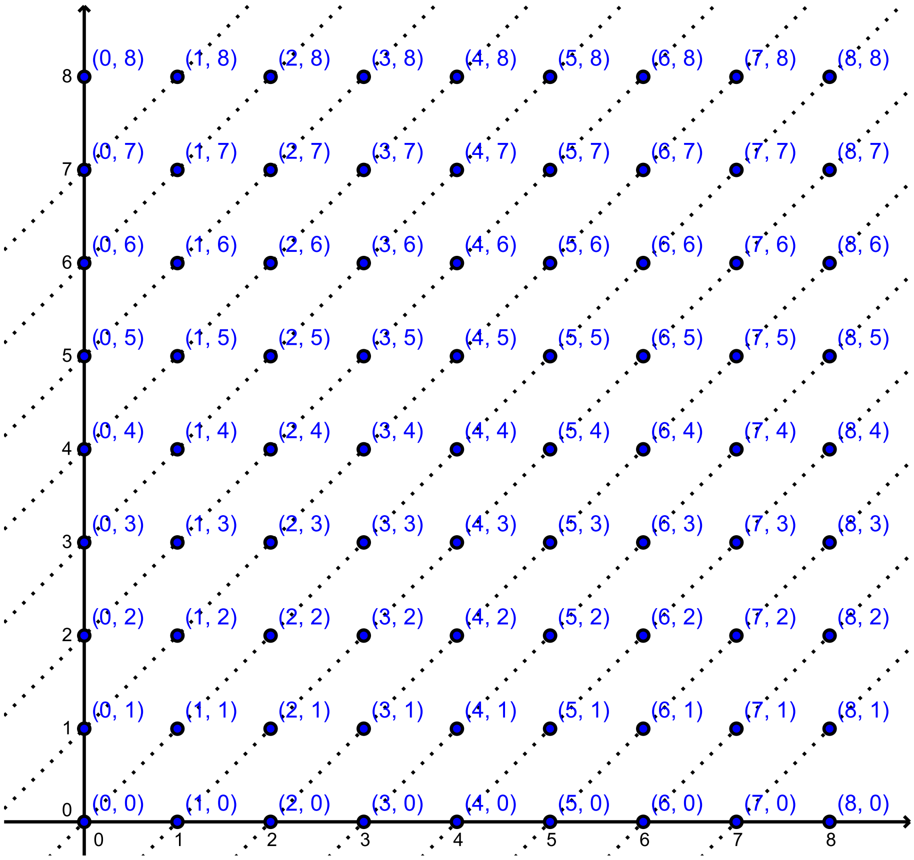
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Määritellään joukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ seuraavasti:

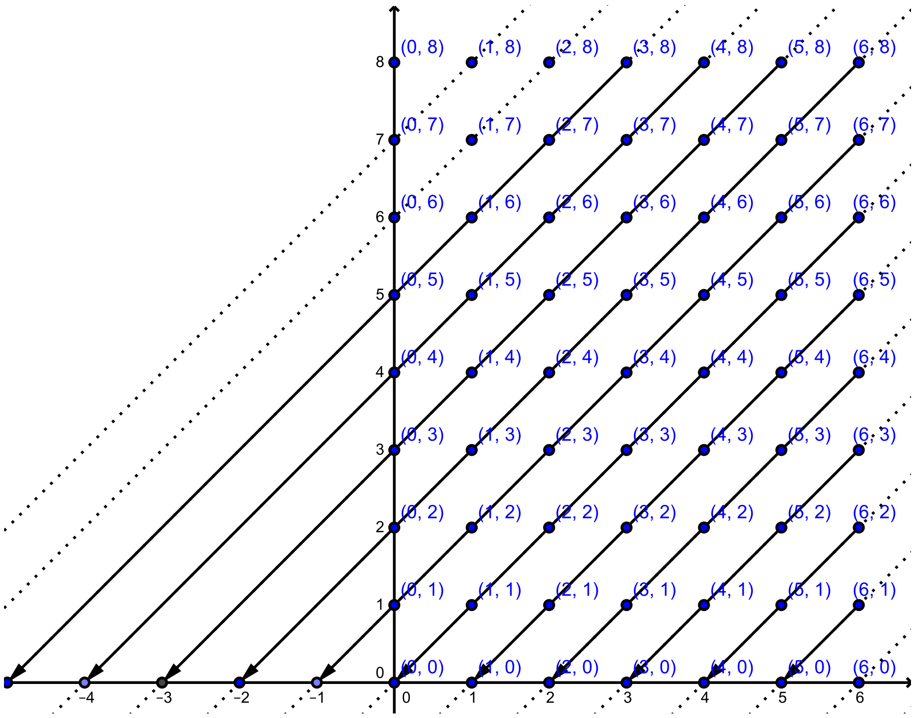
$$(m, n) \sim (p, r) \Leftrightarrow m + r = n + p$$

Tällainen relaatio on ekvivalenssirelaatio ja se tarjoaa siten osituksen joukolle $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ideana edellä määritellyssä relaatiossa on se, että esimerkiksi luku -2 voidaan nähdä esimerkiksi erotuksina $1 - 3$ ja $2 - 4$. Tällaisia erotuksia ei ole kylläkään määritelty luonnollisten lukujen joukossa. Voidaan kuitenkin huomata, että $1-3 = 2 - 4$ jos ja vain jos $1 + 4 = 2 + 3$. Ajatuksena on siis, että esimerkiksi parit $(1, 3)$ ja $(2, 4)$ ilmaisevat molemmat lukua -2.



Kuvassa merkityille suorille osuvat parit kuuluvat siis samaan ekvivalenssiluokkaan. Määritellään joukko $\mathbb{Z}$ olemaan relaation $\sim$ muodostamien ekvivalenssiluokkien joukko. Esimerkiksi alkiot $(5, 3)$ ja $(6, 4)$ ovat relaatiossa keskenään ja ne kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan (joka ilmaisee luvun 2). Voidaan siis ajatella, että kokonaisluvut ovat luonnollisten lukujen laajennus: esimerkiksi luku 2 voidaan *samaistaa* sen ekvivalenssiluokan kanssa, jonka edustaja on esimerkiksi alkio $(5, 3)$. Ajatusta havainnollistaanee seuraava kuva:



Yhteen- ja kertolasku tulisi näin määritellyille kokonaisluvuille varmastikin määritellä niin, että ne olisivat riippumattomia ekvivalenssiluokan edustajan valinnasta ja palautuisivat vastaaviin luonnollisten lukujen laskutoimituksiin. Esimerkiksi laskemalla yhteen parien $(3, 1)$ ja $(5, 2)$ määrittämät luvut, pitäisi olla tuloksena olla luku 5. Huomataan, että esimerkiksi pari $(3 + 5, 1 + 2) = (8, 3)$ kuuluu luvun 5 määrittämään elvivalenssiluokkaan.

Merkitään sitä ekvivalenssiluokkaa, jonka edustaja on alkio (m, n) merkinnällä $[(m, n)]$. Kokonaislukujen yhteenlasku palautetaan luonnollisten lukujen yhteenlaskuun seuraavasti:

$$[(m, n)] + [(p, r)] = [(m + p, n + r)].$$

Vstaavasti kertolasku määritellään kokonaisulukujen joukossa seuraavasti:

$$[(m, n)] \cdot [(p, r)] = [(mp + nr, mr + np)].$$

Sekä yhteen- että kertolasku ovat näin määriteltyinä ns. hyvin määriteltyjä eli laskutoimituksen tuloksena saadaan aina sama ekvivalenssiluokka riippumatta edustajien valinnasta.

Näin määritellyille kokonaisluvuille pätee kaikki tutut laskusäännöt ja ominaisuudet (algebran mielessä kyseessä on ryhmä, jopa rengas, mutta *ei kunta*!).

Esimerkiksi kokonaislukujen yhteenlaskun vaihdannaisuuden toteaminen on helppoa, kun tiedetään että luonnollisille kaikille luvuille m, n pätee $m + n = n + m$. Tällöin:

$$\begin{aligned}
[(m,n)] + [(p,r)] &= [(m+p, n+r)] \\
&= [(p+m, r+n)] \\
&= [(p,r)] + [(m,n)].
\end{aligned}$$

5 Rationaaliluvut

Rationaalilukujen konstruktiossa käytetään samaa ideaa kuin kokonaisulukujen konstruktiossa: määritellään joukossa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sopiva ekvivalenssirelaatio ja määritellään rationaaliluvut syntyvinä ekvivalenssiluokkina.

Määritellään joukossa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$(m,n) \sim (p,q) \Leftrightarrow mq = np.$$

Idea on seuraava: haluttaisiin, että esimerkiksi $1/2 = 2/4$. Voimme ajatella paria (m, n) murtolukuna m/n. Yhtäpitävä ehto ehdolle $m/n = p/q$ on $mq = np$. Näin syntyy sopiva ehto, joka vastaa käsitystämme murtoluvuista.

Määritellään siis rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ olemaan relaation $\sim$ muodostamien ekvivalenssiluokkien joukko.

Yhteenlasku ja kertolasku määritellään rationaaliluvuissa asettamalla,

$$[(m,n)] + [(p,q)] = [(mq+np, nq)],$$

$$[(m,n)] \cdot [(p,q)] = [(mp, nq)],$$

jolloin ne vastaavat ”tuttuja laskusääntöjä”

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq},$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

Näin määritellyille rationaaliluvuille pätee jälleen tutut ominaisuudet (vaihdannaisuus, liitännäisyys, osittelu sekä nolla- ja vasta-alkion olemassaolo). Nämä voidaan helposti tarkistaa palauttamalla ne kokonaislukujen vastaaviin ominaisuuksiin (aivan kuten kokonaislukujen tapauksessa ominaisuudet palautuivat luonnollisten lukujen vastaaviin ominaisuuksiin). Algebran mielessä rationaalilukujen joukko muodostaa (järjestetyn) kunnan.

6 Reaaliluvut

Esimerkiksi yhtälöllä $2x = 3$ ei ole ratkaisua kokonaislukujen joukossa, mutta laajentamalla lukualuetta joukkoon $\mathbb{Q}$ sellainen löytyy. Vastaavanlainen motivaatio voidaan ajatella olevan taustalla reaalilukujen määrittelemiseksi. Esimerkiksi yhtälöllä $x^2 = 4$ on ratkaisu jopa luonnollisten lukujen joukossa. Entä sitten yhtälöllä $x^2 = 2$? Pitäisi varmastikin olla sellainen luku, joka kuvaa sellaisen neliön sivun pituutta, jossa neliön pinta-ala on 2.

Rationaali- ja reaalilukuja erottava ominaisuus on *täydellisyys*. Asiaa on käsitelty mm. kurssilla Analyysi I. Katsotaan tässä idean tasolla, miten rationaaliluvut voidaan "täydellistää" reaaliluvuiksi kahdella eri tavalla.

Yksi tapa laajentaa lukualuetta reaalilukuihin, on käyttää Caychyn jonoja. Jono (a_n) on Caychyn jono, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $K \in N$, että

$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ kaikilla } n, m > K.$$

Caychyn jonon määritelmä muistuttaa raja-arvon määritelmää, mutta erona on kuitenkin se, että mistään raja-arvosta ei puhuta: jono on Caychyn jono, mikäli jonon jäsenet ovat niin lähellä *toisiaan* kuin halutaan, kunhan indeksit ovat riittävän suuria. Ideana reaalilukujen määrittelyssä Caychyn jonojen avulla on, että jonojen voidaan ajatella edustavan lukuja: $\mathbb{Q}$:ssa suppenevat Caychyn jonot edustavat raja-arvoaan ja sellaiset $\mathbb{Q}$:n Cauchyn jonot, jotka eivät suppene $\mathbb{Q}$:ssa kuvaavat aina jotakin irrationaalilukua.

Merkitään joukon $\mathbb{Q}$ Caychyn jonojen joukkoa symbolilla $\mathcal{C}$. Määritellään joukossa

$\mathcal{C}$ relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$(a_n) \sim (b_n) \text{ jos ja vain jos jono } (a_n - b_n) \text{ suppenee kohti nollaa.}$$

Tällainen relaatio on ekvivalenssirelaatio ja samaa rationaalilukua kohti suppenevat jonot kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan. Mutta saamme tämän lisäksi ”täydellistettyä” rationaalilukujen joukon ja näin syntyvä joukko voidaan määritellä reaaliluvuiksi.

Toinen tunnettu tapa konstruoida reaaliluvut on peräisin Richard Dedekindiltä. Ideana on määritellä reaaliluvut ”(rationaali)lukusuoran kahtiajakoina” eli ns. Dedekindin leikkauksina. Sanotaan, että rationaalilukujen osajoukot A ja B muodostavat Dedekindin leikkauksen, jos

1. A ja B ovat epätyhjiä,
2. joukossa A ei ole suurinta alkiota,
3. jokainen joukon A alkio on pienempi kuin jokainen joukon B alkio ja
4. $A \cup B = \mathbb{Q}$

Esimerkiksi joukkojen

$$A_1 = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 2\} \text{ ja } B_1 = \{b \in \mathbb{Q} \mid b \geq 2\}$$

muodostama Dedekindin leikkaus vastaa rationaalilukua 2 ja vastaavasti joukkojen

$$A_2 = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2 \text{ tai } a < 0\} \text{ ja } B_2 = \{b \in \mathbb{Q} \mid b^2 \geq 2 \text{ ja } b > 0\}$$

muodostama Dedekindin leikkaus vastaa reaalilukua $\sqrt{2}$.