YLIOPISTOMATEMATIIKKA AINEENOPETTAJAN NÄKÖKULMASTA (SYKSY 2016)

PBL-CASE 1: ANALYYSI

Seuraavassa esitetään tiivistelmä eräässä haastattelututkimuksessa kerätystä aineistosta.

Mark ja Theresa ovat matematiikan pääaineopiskelijoita, jotka ovat opiskelleet 4-5 vuotta. Mark ja Theresa opiskelevat suomalaisessa yliopistossa ja ovat käyneet koulunsa Suomessa. Mark kokee, että on menestynyt opinnoissaan keskimääräisen hyvin ja Theresa arvioi menestyneensä hyvin. Theresa ja Mark toivovat molemmat työllistyvänsä valmistumisensa jälkeen matematiikan aineenopettajan ammattiin.

Tutkimuksessa käsiteltiin seuraavia funktioita:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1, \\ -2x+6, & x \geqslant 1. \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2-4x+3, & x \neq 4, \\ 1, & x=4. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & x<1, \\ -2x+5, & x \geqslant 1. \end{cases} \qquad i(x) = \begin{cases} x, & x<1, \\ x+1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Haastattelussa pyydettiin haastateltavia kertomaan kunkin funktion osalta, onko funktio derivoituva vai ei ja miksi näin on.

Mark

Kysyttäessä derivoituvuudesta Markilla vaikutti olevan käytössään menetelmä, jossa hän derivoi molemmat funktion määrittelyssä käytetyt lausekkeet. Tämän jälkeen hän tarkasti, oliko saaduilla derivaattalausekkeilla samat arvot pisteessä, jossa funktiota määrittävä lauseke vaihtuu. Funktion g tapauksessa Mark tarjosi aluksi visuaalista tulkintaa: kuvaajaan muodostuvaan "kulmaan" ei ole mahdollista piirtää yksikäsitteistä tangenttia. Haastattelijan pyydettyä Markia laskemaan vasemman- ja oikeanpuoleiset erotusosamäärän raja-arvot pisteessä 1, Mark sai lausekkeet x+2 ja -2x+5 ja siten vastaukset 1 ja -2. Mark totesi: "Erotusosamäärän käyttö johtaa samaan tulokseen". Funktion f tapauksessa hän käytti samaa menetelmää ja sai lausekkeet x+1 ja -2x+6, jotka eivät saa samaa arvoa pisteessä 1. Mark oli vastannut kirjalliseen testiin, että funktio h on derivoituva kaikkialla. Hän selitti vastaustaan seuraavasti:

> *Mark: Pisteessä neljä derivaatta on nolla.*
> *Haastattelija: Miksi?*
> *Mark: Koska se on vakio!*

Mark ei selittänyt asiaa tarkemmin, mutta haastattelussa Mark haluisi vielä käyttää samaa metodia kuin funktioille g ja f. Hän sai lausekkeet 2x-4 ja 0. Koska nämä eivät saaneet samaa arvoa pisteessä 4, Mark päätteli, ettei h voikaan olla derivoituva.

Eniten ongelmia Markille tuotti funktio i. Hän aloitti samalla tavalla kuin muiden funktioiden tapauksessa laskemalla derivaattalausekkeet ja totesi niiden saavan saman arvon pisteessä 1. Hän päätteli funktion i olevan derivoituva. Hän huomasi kuitenkin kuvaajasta välittömästi, että funktio ei ollut jatkuva pisteessä 1. Hän muisti selvästi, että jatkuvuus on välttämätön ehto derivoituvuudelle.

Mark: Kyllä, molemmat derivaatat saavat saman arvon, tullaan sitten vasemmalta tai oikealta. Jos ajatellaan pelkästään sitä, että ne ovat samat... sitten sen on pakko olla derivoituva... mutta se ei ole siinä pisteessä jatkuva!

Mark alkoi epäillä muistiaan. Hän yritti keksiä muita funktioita, jotka olisivat derivoituvia, muttei jatkuvia. Hän pohti olisiko esimerkiksi tangettifunktio sellainen. Hän päätteli lopuksi, että hän muistaa varmastikin väärin ja funktio i voi olla kaikkialla derivoituva, vaikkei se olekaan kaikkialla jatkuva.

Mark: Sama erotusosamäärän raja-arvo tulee molemmista. Tästä voi päätellä, että funktio on derivoituva.
Haastattelija: Onko se vastauksesi?
Mark: Olkoon se vastaukseni!

Theresa

Haastattelu Theresan kanssa alkoi keskustelulla jatkuvuuden ja derivoituvuuden suhteesta. Theresa muisti, että on olemassa lause näiden välisestä suhteesta, muttei muistanut mitä lause sanoi. Ensimmäiseksi hän mainitsi, että derivoituvuus ei vaadi jatkuvuutta: "Ainakin on niin, että epäjatkuva funktio voi olla derivoituva." Hän perusteli tämän piirtämällä funktiota h vastaavan funktion kuvaajan. Hän oli vakuuttunut, että kyseinen funktio on derivoituva jokaisessa pisteessä, myös siinä jossa funktion kuvaajassa oli "hyppykohta".

Haastattelija: Olet sitä mieltä, että tämä on epäjatkuva, mutta derivoituva?
Theresa: Kyllä, koska on mahdollista piirtää tangentti!

Kuvaajan hyppykohtaan Theresa piirsikin "tangentin". Hän jatkoi jatkuvuuden ja derivoituvuuden suhteen miettimistä. Hän piirsi graafin, jossa oli "kulmakohta" (kuten funktiossa g) ja selitti, että kulmakohtaan on mahdotonta piirtää yksikäsitteistä tangenttia (hän piirsi useita "tangenttiehdokkaita" kulmakohtaan) ja päätteli siten, että funktio ei ollut derivoituva, vaikka se olikin jatkuva.

Nämä kaksi esimerkkiä johtivat Theresan konfliktiin: hän muisti, että oli olemassa lause derivoituvuuden ja jatkuvuuden suhteessa, mutta esimerkkien perusteella ei ollut mahdollista että derivoituvuudesta seuraisi jatkuvuus tai toisin päin. Hän tarkasti esimerkkinsä ja päätteli, että hänen muistinsa täytyi pettää lauseen suhteen.

Sille, että funktio f ei ollut derivoituva Theresa antoi kaksi selitystä. Ensiksi hän totesi, että lausekkeiden x+1 ja -2x+6 derivaatat eivät saa samoja arvoja pisteessä 1. Tämän lisäksi hän selitti, että pisteessä 1 funktion kuvaajalle ei voi piirtää tangenttia. Hän selitti tämän piirtämällä useita "tangenttiehdokkkaita" vasemman- ja oikeanpuoleiselle päätepisteelle.

Funktion i tapauksessa hän huomasi, että derivaattojen lausekkeet olivat samat pisteessä 1, mutta siitä huolimatta tangentin piirtäminen funktion kuvaajalle oli mahdotonta. Theresa oli varma, että funktio i ei ollut derivoituva.

Theresa: Tämä ei ole derivoituva, vaikka molemmat [derivaattalausekkeet] saavat arvon 1.
Haastattelija: Miksi se ei ole derivoituva?
Theresa: Ajattelen tangenttia, ei ole mahdollista piirtää yksikäsitteistä tangenttia pisteessä x=1.

Theresaa pyydettiin selittämään asia derivaatan määritelmän perusteella. Theresa oli hyvin epävarma kyvystään käyttää määritelmää:

Theresa: Eh, en usko, että osaan kirjoittaa sitä, oota hetki... Mä en muista... En mä osaa käyttää sitä, mä en ymmärtänyt sitä lukiossa...