



**YLIOPISTOMATEMATIIKKA
AINEENOPETTAJAN NÄKÖKULMASTA
SYKSY 2016
6. TAPAAMISKERTA: 9.12.2016**

Jani Hannula
jani.hannula@helsinki.fi

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos



TÄNÄÄN OHJELMASSA: LUKUALUEET JA LASKUTOIMITUKSET

- Käsitellään tänäänkin asiaa parin casen kautta
- Loppuun koontia
- Ennakkomateriaalin ideana oli antaa kuva siitä, miten lukualueita laajennetaan matematiikan teoriassa
 - Ryhmissä pieni keskustelu asiasta; mitä tiedät lukualueista ja laskutoimituksista?

TAPAUS 1: Jakolasku

Peruskoulun 7. luokan alussa Liisa laski matematiikan tehtävää, jossa hänen piti lopuksi suorittaa jakolasku $\frac{50}{0,2}$. Liisa oli ehtinyt kesäloman aikana unohtaa, miten kokonaisluku jaetaan desimaaliluvulla ilman laskinta, mutta sai laskimesta tuloksen 250. Liisa hämmästyí tulosta ja ihmetteli sitä ääneen, koska hänestä jakolasku aina pienentää jaettavaa lukua. Nyt jaettava luku mukamas *suureni* jakolaskun seurauksena, minkä vuoksi Liisa epäili tuloksen oikeellisuutta. Liisa merkitsi kuitenkin tulokseksi 250, mikä oli sama kuin oppikirjan viimeisiltä sivuilta löytynyt oikea vastaus ja jatkoi seuraavaan tehtävään.

RYHMÄSSÄ POHDITTAVAA:

- **Keksikää mahdollisimman monta ja monen tasoista selitystä sille, että $50/0,2 = 250$.**
- **Liittyvätkö selityksenne jotenkin toisiinsa?**
- **Minkälaisilla kysymyksillä tai vihjeillä Liisan matemaattista ajattelua voisi mielestänne tukea?**

TAPAUS 2: Yhteenlasku

Liisan kanssa samalla luokalla ollut Kalle laski murtoluvuilla seuraavasti: $5/8 + 3/5 = 8/13$. Opettaja osoitti vihkoa ja totesi, että laskussa on virhe. Kalle ihmetteli tätä. ”Jos Petteri Koponen onnistuu ensimmäisellä puoliajalla viidessä kahdeksasta vapaaheitosta ja toisella puoliajalla kolmessa viidestä vapaaheitosta, hän onnistuu yhteensä kahdeksassa kolmestatoista vapaaheitosta”, totesi Kalle.

RYHMÄSSÄ POHDITTAVAA:

- **Keksikää mahdollisimman monta ja monen tasoista syytä tai selitystä sille, että kaikilla rationaaliluvuilla a/b ja c/d pätee:**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

ja toisaalta, että (Kallen ehdottama) määritelmä

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

ei ole rationaalilukujen yhteenlaskulle kovin mielekäs.

- **Millaisilla kysymyksillä tai kommentteilla lähtisitte purkamaan asiaa Kallen kanssa? (Voitte vaikka näytellä tilanteen...)**



KOONTIA, OSA I: MATEMATIIKAN TEORIA

- Algebrallisissa rakenteissa oleellisia ovat mm. **laskutoimitukset** sekä **neutraali-alkiot**, **vasta-alkiot** ja **käänteisalkiot**
- Esimerkiksi rationaalilukujen joukossa laskutoimitukset *määritellään* juuri niin, että ne vastaavat käsityksiämme ”piirakan leikkaamisista” yms. ja rationaalilukujen murtolukuesitys kuvastaa ”osuuksia”
- Jos mietitään esimerkiksi struktuuria $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ jakolasku voidaan määritellä yksinkertaisesti käänteisalkiolla kertomisena
- Jos verrataan rationaalilukujen joukkoa ja reaalilukujen joukkoa, molemmat ovat **tiheitä**, mutta rationaalilukujen joukko ei ole **täydellinen**



KOONTIA, OSA II: KASVATUSTIETEEN TEORIA

- Oppijan näkökulmasta lukualueiden laajentamiseen liittyy **käsitteellinen muutos** (vanha tieto ei ole ”yhteensopiva” uuden kanssa):
 - esimerkiksi (nollaa suuremmilla) luonnollisilla luvuilla kertolasku ei koskaan pienennä tulosta; rationaalilukujen joukossa niin voi käydä, jos toinen tulontekijä on välillä $]0,1[$
- Kun vanha tieto (”miniteoria”) on ristiriidassa uuden kanssa, tapahtuu tutkijoiden mukaan yksi seuraavista: käsitteellinen muutos, virhepäätelmät tai asian välttely

(asiaan liittyvää tutkimusta mm. K. Merenluoto ja E. Lehtinen)



KOONTIA, OSA III: MATEMAATTINEN AJATTELU

- Yksi näkökulma matemaattisen ajattelun hahmottamiseen on David Tallin matematiikan kolme maailmaa:
 1. Ruumiillinen maailma
 2. Symbolinen maailma
 3. Aksiomaattis-formaali maailma
- Nämä voidaan nähdä hierarkkisina, mutta toisaalta matematiikan tekeminen voidaan nähdä näiden vuoropuheluna
- Miltä lukualueet ja laskutoimitukset näyttävät tämän viitekehyksen näkökulmasta?