Logiikka ja todistaminen

1 Johdanto

Lähestymme kurssilla logiikkaa ja todistamista opettajan näkökulmasta, jolle pohjaksi voi katsoa yliopistolla opiskeltavan lauselogiikan ja ”jos... niin...”-päättelyt. Aiheeseen liittyvää hyvää luettavaa ovat mm. seuraavat lähteet:

- Jouko Väänänen: Logiikka 1
- Lotta Oinonen: Johdatus yliopistomatematiikkaan, luentomateriaali
- Johanna Rämö: Yhtälönratkaisusta

Poimitaan tässä erityiseen tarkasteluun todistamistekniikat sekä yhtälönratkaisu ja lähestytään tapaamiskerralla niitä opettajan näkökulmasta.

2 Yliopisto vs. koulu

Heti yliopiston ensimmäisillä matematiikan kursseilla on huomattavissa tietty ero koulumatematiikan lähestymistapaan: asiat todistetaan tarkasti ja teoria rakennetaan täsmällisesti. Toisaalta myös koulumatematiikassa on OPS:ssa tavoitteissa todistusajattelua ja matemaattisen teorian rakenteen ymmärtämistä. Palautellaan tässä mieleen todistustekniikkojen taustalla oleva lauselogiikka sekä yhtälönratkaisuun liittyvä päätteleminen.

3 Logiikkaa ja todistustekniikkaa

Kurssilla Johdatus yliopistomatematiikkaan on käsitelty varsin kattavasti lauselogiikan perusteet ja tyypilliset todistustekniikat. Katsotaan tässä vielä kertauksena hieman samoja asioita, joiden pohjalta voimme pohtia koulumatematiikkaa.

Helpoin todistus on usein väitteen todistaminen vääräksi, johon riittää yksi vastaesimerkki. Tyypiliisesti matematiikassa on todistettava (ainakin todistuksen osana) ”jos ..., niin ...”-tyyppisiä väitteitä. Palautetaan tätä varten mieleen implikaation totuustaulu, sillä väitettä ”jos A, niin B” vastaa implikaatio $A \Rightarrow B$.

A	B	$A \to B$
t	t	t
t	e	e
e	t	t
e	e	t

Ekvivalenssin totuustaulu on taas on sama kuin *implikaatiolla molempiin suuntiin.*

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B \wedge B \to A$
t	t	t	t
t	e	e	e
e	t	e	e
e	e	t	t

Tämän vuoksi ”jos ja vain jos”-tyyppiset väitteet voidaan todistaa tekemällä kaksi ”jos ..., niin ...”-tyyppistä todistusta.

”Jos A, niin B”-tyyppiset väitteet voidaan osoittaa

- suoralla todistuksella (oletetaan A ja päätellään B) tai
- epäsuoralla todistuksella, jotka voidaan esittää joko
    - kontrapositiotodistusena (oletetaan $\neg B$ ja päätellään $\neg A$) tai
    - ristiriitatodistuksena (oletetaan $\neg B$ ja päätellään ristiriita).

Kontrapositiotodistuksen ideana voidaan nähdä, että lauseen $\neg B \to \neg A$ totuustaulu (seuraavalla sivulla) on sama kuin lauseen $A \to B$. Ristiriitatodistuksen idean voi taas ajatella olevan, että mikäli oletus $\neg B$ johtaa ristiriitaan (oletuksen A kanssa), on kyseisen vaihtoehdon oltava mahdoton ja päinvastaisen (eli alkuperäisen väitteen) tosi.

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \rightarrow \neg A$
t	t	t	e	e	t
t	e	e	e	t	e
e	t	t	t	e	t
e	e	t	t	t	t

4 Yhtälönratkaisusta

Voidaan ajatella, että yhtälönratkaisussa (ja epäyhtälöiden ratkaisussa) tavoitteena on etsiä *kaikki* ne muuttujan arvot, joilla yhtälö pätee. Todistamisen kannalta on kyse siitä, että on osoitettava, että kyseiset arvot toteuttavat yhtälön (tai epäyhtälön) ja *mikään muu arvo taas ei voi toteuttaa yhtälöä.* Yhtälönratkaisussa on siis kaksi suuntaa.

Mitä tämä tarkoittaa käytännössä? Koulumatematiikassa kirjoitetaan sujuvasti tavalla tai toisella esimerkiksi:

$$\begin{aligned} 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Enemmän matematiikkaa miettineenä ja yliopistossa sitä opiskelleena tiedämme, että edellä esitetyt yhtälöt ovat *yhtäpitävät.* Jos $3x = 5$, niin $x = 5/3$ ja vastaavasti kääntäen: jos $x = 5/3$, niin $3x = 5$. Yhtälöitä ratkoessa voi kuitenkin tulla tilanteita, joissa voi päätellä yhtäpitävyyden sijasta vain implikaatiota. Pohdimme tällaista tilannetta kurssin tapaamiskerralla yhdessä.