Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 6 - Ratkaisuehdotuksia tähtitehtäviin

3.* Määritä ellipsin $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ pinta–ala.

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan tämä samalla tavalla kuin edellinen tehtävä. Parametrisoidaan ellipsin kaari määritellemällä polku $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$. Tällöin saadaan, että

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oint_\gamma F \cdot d\overline{s} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\sin(t), a\cos(t)) \cdot (-a\sin(t), b\cos(t))\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\, dt = \frac{1}{2} \Big/_0^{2\pi} abt \\ &= \pi ab \\ &= \text{area(ellipsi)}.\end{aligned}$$

4.* Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue, ∂D sen säännöllinen positiivisesti suunnistettu reunapolku, ja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ sen parametrisaatio. Merkitään

$$\mathbf{n}(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))/|\gamma'(t)|.$$

Vektorikenttää $\mathbf{n}$ kutsutaan reunan ∂D *ulospäin osoittavaksi yksikköulkonormaaliksi*. Mieti miksi? Olkoon f C^1– vektorikenttä D:n sulkeumassa $\overline{D}$. Määritellään vektorikentän f *divergenssi* kaavalla

$$\nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2.$$

Osoita, että

$$\int_D \nabla \cdot f\, dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{n} \cdot f\, ds.$$

Tämä tulos on *divergenssiteoreema* tasoalueessa D. Ylläolevassa kaavassa oikeanpuoleista termiä kutsutaan *vektorikentän f vuoksi reunan ∂D läpi*.

Ratkaisuehdotus: Määritellään vektorikenttä $F = (-f_2, f_1)$. Se on selvästi C^1-vektorikenttä, joten voidaan soveltaa Greenin kaavaa. Nähdään myös, että $\partial_1 F_2 = \partial_1 f_1$ ja $\partial_1 F_2 = -\partial_2 f_2$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\int_D \nabla \cdot f\, dxdy &= \int_D \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2\, dxdy \\ &= \int_D \partial_1 F_2 - \partial_2 F_2\, dxdy \\ &= \oint_\gamma F \cdot d\overline{s} = \int_\gamma F(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \\ &= \int_\gamma (-f_2(\gamma(t)), f_1(\gamma(t)) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))\, dt \\ &= \int_\gamma f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\, dt \\ &= \int_\gamma \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|} \cdot (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t)))|\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int_{\partial D} \mathbf{n} \cdot f\, ds.\end{aligned}$$

Martion kirjasta löytyy myös todistus divergenssiteoreemalle. Se on lause kirjassa lause 6.5.1.