Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 6 - Ratkaisuehdotuksia tähdettömiin tehtäviin

Tehtäväsarja I

1. (Martio, HT 6.2:2) Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue, jonka reunaa edustaa C^1–käyrä γ ja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (-y, x)$. Näytä, että

$$\text{area}\,(D) = \frac{1}{2}\oint_\gamma F \cdot d\overline{s}.$$

Vihje: Alueen D pinta–ala area (D) määritellään kaavalla

$$\text{area}\,(D) = \int_D 1\, dxdy.$$

Ratkaisuehdotus: Käytetään tehtävän ratkaisemiseen Greenin kaavaa. Sen avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\oint_\gamma F \cdot d\overline{s} &= \int_D \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1\, dxdy = \int_D 1 - (-1)\, dxdy \\ &= 2\int_D 1\, dxdy = 2 \cdot \text{area}(D).\end{aligned}$$

Täten

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2}\oint_\gamma F \cdot d\overline{s}.$$

2. (Martio, HT 6.2:3) Käytä edellistä tehtävää ympyrän $B(0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2 + y^2 \leq r^2\}$ pinta–alan määräämiseen.

Ratkaisuehdotus: Parametrisoidaan ympyrän kaari kuten tavallisesti eli olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sellainen, että $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$. Nyt edellisen tehtävän nojalla

$$\text{area}(B(0, r)) = \frac{1}{2}\oint_\gamma F \cdot d\overline{s}.$$

Lasketaan integraalin arvo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oint_\gamma F \cdot d\overline{s} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-r\sin(t), r\cos(t)) \cdot (-r\sin(t), r\cos(t))\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, dt = \frac{1}{2} \Big/_0^{2\pi} r^2 t \\ &= \pi r^2.\end{aligned}$$

3.* Määritä ellipsin $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ pinta–ala.

Tehtäväsarja II

4.* Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue, ∂D sen säännöllinen positiivisesti suunnistettu reunapolku, ja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ sen parametrisaatio. Merkitään

$$\mathbf{n}(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))/|\gamma'(t)|.$$

Vektorikenttää $\mathbf{n}$ kutsutaan reunan ∂D *ulospäin osoittavaksi yksikköulkonormaaliksi.* Mieti miksi? Olkoon f C^1– vektorikenttä D:n sulkeumassa $\overline{D}$. Määritellään vektorikentän f *divergenssi* kaavalla

$$\nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2.$$

Osoita, että

$$\int_D \nabla \cdot f \, dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{n} \cdot f \, ds.$$

Tämä tulos on *divergenssiteoreema* tasoalueessa D. Ylläolevassa kaavassa oikeanpuoleista termiä kutsutaan *vektorikentän f vuoksi reunan ∂D läpi.*

5. Oletetaan että tasoalue D toteuttaa ylläolevan tehtävän oletukset. Olkoot $u, v : \overline{D} \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita. Määritellään ns. *Laplace–operaattori* kaavalla

$$\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2.$$

(a) Osoita, että $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$.

(b) Osoita, että pätee *Greenin ensimmäinen kaava*,

$$\int_D u \, \Delta v \, dxdy = \int_{\partial D} u \, \partial_{\mathbf{n}} v \, ds - \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy.$$

Vihje: Osoita ensin, että $\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \, \Delta v$ ja sen jälkeen sovella divergenssiteoreemaa vektorikenttään $u \nabla v$.

Ratkaisuehdotus:

(a) Gradientin määritelmästä saadaan, että

$$\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Sovelletaan tähän divergenssin kaavaa:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla u &= \partial_1(\partial_1 u) + \partial_2(\partial_2 u) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&= \Delta u.
\end{aligned}$$

(b) Tehdään kuten vihjeessä ohjeistetaan eli osoitetaan, että $\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \, \Delta v$. Huomataan ensin, että

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \cdot \nabla \cdot \nabla v$$

tulon derivaattasäännön nojalla. Tästä saadaan käyttämällä edellisessä kohdassa osoitettua indentiteettiä $\nabla \cdot \nabla u = \Delta u$, että

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (u \nabla v) &= \nabla u \cdot \nabla v + u \cdot \nabla \cdot \nabla v \\ &= \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v,\end{aligned}$$

mikä pitikin osoittaa.

Sovelletaan yllä todistettua kaavaa ja divergenssiteoreemaa. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_D u \Delta v \, dxdy &= \int_D \nabla \cdot (u \nabla v) - \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy \\ &= \int_{\partial D} n \cdot (u \nabla v) \, d\bar{s} - \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy \\ &= \int_{\partial D} u \, \partial_n v \, ds - \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy.\end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa on käytetty suunnatun derivaatan määritelmää.

6. Olkoot u, v ja D kuten yllä. Osoita *Greenin toinen kaava*,

$$\int_D u \, \Delta v - v \, \Delta u \; dxdy = \int_{\partial D} u \, \partial_{\mathbf{n}} v - v \, \partial_{\mathbf{n}} u \, ds.$$

Ratkaisuehdotus: Tämän voi osoittaa edellisen tehtävän avulla. Nyt pätee, että

$$\begin{aligned}\int_D u \Delta v - v \Delta u \, dxdy &= \int_D u \Delta v \, dxdy - \int_D v \Delta u \, dxdy \\ &= \int_{\partial D} u \, \partial_n v \, ds - \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy - \int_{\partial D} v \, \partial_n u \, ds + \int_D \nabla v \cdot \nabla u \, dxdy \\ &= \int_{\partial D} u \, \partial_n v \, ds - \int_{\partial D} v \, \partial_n u \, ds.\end{aligned}$$

Tehtäväsarja III

Olkoot edelleen D kuten yllä.

7. Oletaan, että u on harmoninen tasoaluessa D ja että $u = 0$ alueen D reunalla ∂D. Osoita, että $u = 0$. **Vihje** : Käyttäen Greenin ensimmäistä kaavaan osoita että $\nabla u = 0$ alueessa D.

Ratkaisuehdotus: Funktio u on harmoninen, joten $\Delta u = 0$. Greenin ensimmäisestä kaavasta saadaan, että

$$\int_D u \Delta u \, dxdy = \int_{\partial D} u \, \partial_n u \, ds - \int_D \nabla u \cdot \nabla u \, dxdy,$$

joka on tietenkin yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla u \, dxdy = \int_{\partial D} u \, \partial_n u \, ds - \int_D u \Delta u \, dxdy.$$

Koska $\Delta u = 0$, niin $u \Delta u = 0$ ja täten

$$\int_D u \Delta u \, dxdy = 0.$$

Lisäksi oletettiin, että $u = 0$ joukossa ∂D, joten

$$\int_{\partial D} u \, \partial_n u \, ds = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla u \, dxdy = 0$$

joten $\nabla u = 0$ koko alueessa D.

Funktion u gradientti on nolla, joten u on vakiofunktio. Täten $u = 0$ alueessa D, koska $u = 0$ alueen D reunalla.

8. Muutoin sama kuin edellinen tehtävä, mutta oletetaan nyt että $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ alueen D reunalla ∂D. Mitä osaat sanoa funktioista u?

   Ratkaisuehdotus: Oletetaan siis, että u on harmoninen ja $\partial_n u = 0$ alueen D reunalla. Edellisen tehtävän tapaan pätee, että $\nabla u = 0$ koko alueessa D, koska

   $$\int_D u \Delta u \, dxdy = 0$$

   ja

   $$\int_{\partial D} u \, \partial_n u \, ds = 0.$$

   Täten u on vakiofunktio.