Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 09.12.2016 klo 19.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 16.12.2016 klo 19.00

Tehtäväsarja I

1. (Martio, HT 6.2:2) Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue, jonka reunaa edustaa C^1–käyrä γ ja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (-y, x)$. Näytä, että
$$\text{area}\,(D) = \frac{1}{2} \oint_\gamma F \cdot d\overline{s}.$$
Vihje: Alueen D pinta–ala area (D) määritellään kaavalla
$$\text{area}\,(D) = \int_D 1\, dxdy.$$

2. (Martio, HT 6.2:3) Käytä edellistä tehtävää ympyrän $B(0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le r^2\}$ pinta–alan määräämiseen.

3.* Määritä ellipsin $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ pinta–ala.

Tehtäväsarja II

Tässä tehtäväsarjassa johdamme *divergenssiteoreeman* sekä *Greenin ensimmäisen– ja toisen kaavan* tasoalueessa.

4.* Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue, ∂D sen säännöllinen positiivisesti suunnistettu reunapolku, ja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ sen parametrisaatio. Merkitään
$$\mathbf{n}(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))/|\gamma'(t)|.$$
Vektorikenttää $\mathbf{n}$ kutsutaan reunan ∂D *ulospäin osoittavaksi yksikköulkonormaaliksi*. Mieti miksi?
Olkoon f C^1– vektorikenttä D:n sulkeumassa $\overline{D}$. Määritellään vektorikentän f *divergenssi* kaavalla
$$\nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2.$$
Osoita, että
$$\int_D \nabla \cdot f\, dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{n} \cdot f\, ds.$$
Tämä tulos on *divergenssiteoreema* tasoalueessa D. Ylläolevassa kaavassa oikeanpuoleista termiä kutsutaan *vektorikentän f vuoksi reunan ∂D läpi.*

5. Oletetaan että tasoalue D toteuttaa ylläolevan tehtävän oletukset. Olkoot u, $v : \overline{D} \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita. Määritellään ns. *Laplace–operaattori* kaavalla
$$\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2.$$
   (a) Osoita, että $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$.

(b) Osoita, että pätee *Greenin ensimmäinen kaava*,

$$\int_D u\,\Delta v\,dxdy = \int_{\partial D} u\,\partial_{\mathbf{n}} v\,ds - \int_D \nabla u \cdot \nabla v\,dxdy.$$

Vihje: Osoita ensin, että $\nabla \cdot (u\,\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\,\Delta v$ ja sen jälkeen sovella divergenssiteoreemaa vektorikenttään $u\nabla v$.

6. Olkoot u, v ja D kuten yllä. Osoita *Greenin toinen kaava*,

$$\int_D u\,\Delta v - v\,\Delta u\,dxdy = \int_{\partial D} u\,\partial_{\mathbf{n}} v - v\,\partial_{\mathbf{n}} u\,ds.$$

Tehtäväsarja III

Kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio u on *harmoninen*, jos $\Delta u = 0$, Esimerkkejä harmonisista funktiosta ovat esimerkiksi staattisen sähkökentän potentiaali ja ajan suhteen vakio lämpötila–jakauma vakioaineessa. Olkoot edelleen D kuten yllä.

7. Oletaan, että u on harmoninen tasoaluessa D ja että $u = 0$ alueen D reunalla ∂D. Osoita, että $u = 0$. **Vihje** : Käyttäen Greenin ensimmäistä kaavaan osoita että $\nabla u = 0$ alueessa D.

8. Muutoin sama kuin edellinen tehtävä, mutta oletetaan nyt että $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ alueen D reunalla ∂D. Mitä osaat sanoa funktioista u?