Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 5 - Ratkaisuehdotuksia tähtitehtäviin

3.* (Martio HT 6.1:3) Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Määritä

$$\int_\gamma F \cdot d\overline{s}.$$

Ratkaisuehdotus: Myös tämä menee määritelmää käyttäen:

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot d\overline{2} &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t), t) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} t\, dt = \Big/_0^{2\pi} \frac{1}{2}t^2 = 2\pi^2.\end{aligned}$$

4.* Olkoon $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva säännöllinen polku ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva. Olkoon $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ C^1–diffeomorfismi ja määritellään polku $\tilde{\gamma}(t') = \gamma(\phi(t'))$. Laske integraalit

$$\int_\gamma f\, ds, \quad \int_{\tilde{\gamma}} f\, ds.$$

Mitä havaitset? **Huom.** Kuvaus ϕ ei välttämättä ole kasvava!

Ratkaisuehdotus: Kuvaus ϕ on C^1-diffeomorfismi, joten se on jatkuva bijektio. Tämän vuoksi se on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. Martion kirjan perusteella integraalin

$$\int_\gamma f\, ds$$

arvo on polun γ paramterisoinnista riippumaton (vrt. myös edellisen viikon laskaritehtäviä 8 ja 9). Osoitetaan siis, että tehtävän integraalit on samat. Integraali yli polun $\tilde{\gamma}$ on määritelmän mukaan

$$\int_{\tilde{\gamma}} f\, ds = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(t'))) \cdot |\tilde{\gamma}'(t')|\, dt' = \int_a^b f(\gamma(\phi(t')) \cdot |\gamma'(\phi(t'))\phi'(t')|\, dt'.$$

Tutkitaan erikseen tapaukset $\phi'(t') \geq 0$ ja $\phi'(t') < 0$. Oletetaan ensin, että $\phi'(t') \geq 0$ eli että ϕ on kasvava. Tällöin $\phi(a) < \phi(b)$. Muuttujanvaihtokaavalla ($t = \phi(t')$) saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\, ds &= \int_0^1 f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(\phi(t')))|\gamma'(t)|\phi'(t')\, dt' \\ &= \int_a^b f(\gamma(\phi(t')))|\gamma'(\phi(t'))|\phi'(t')\, dt'.\end{aligned}$$

Koska oletuksen mukaan $\phi'(t') \geq 0$, niin

$$|\gamma'(\phi(t'))|\phi'(t') = |\gamma'(\phi(t'))\phi'(t')|,$$

jolloin

$$\int_a^b f(\gamma(\phi(t')))|\gamma'(\phi(t'))|\phi'(t')\,dt' = \int_a^b f(\gamma(\phi(t')))|\gamma'(\phi(t'))\phi'(t')|\,dt'$$

Juuri tämä pitikin osoittaa.

Oletetaan sitten, että $\phi'(t') < 0$ eli että ϕ on vähenevä. Tällöin $\phi(a) > \phi(b)$ ja

$$|\gamma'(\phi(t'))|\phi'(t') = -|\gamma'(\phi(t'))\phi'(t')|.$$

Samanlaisella muuttujanvaihdolla saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_b^a f(\gamma(\phi(t')))|\gamma'(\phi(t'))|\phi'(t')\,dt' &= \int_b^a -f(\gamma(\phi(t')))|\gamma'(\phi(t'))\phi'(t')|\,dt' \\ &= -\int_b^a f(\gamma(\phi(t')))|\gamma'(\phi(t'))\phi'(t')|\,dt' \\ &= \int_a^b f(\gamma(\phi(t')))|\gamma'(\phi(t'))\phi'(t')|\,dt'.\end{aligned}$$