Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 5 - Ratkaisuehdotuksia tähdettömiin tehtäviin

Tehtäväsarja I

1. (Martio, HT 6.1:1) Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektorikenttä $F(x,y) = (x,y)$ ja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ polku $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$. Määritä käyräintegraali

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s}.$$

Ratkaisuehdotus: Käytetään integraalin laskemiseen käyräintegraalin määritelmää, jolloin saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot d\bar{s} &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 F(t,t^2) \cdot (1,2t)\, dt \\ &= \int_0^1 t + 2t^3\, dt = \Big/_{0}^{1} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 = 1.\end{aligned}$$

2. (Martio, HT 6.1:2) Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_2$ ja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0,0,t)$. Näytä, että

$$\int_\gamma f\, ds = 0$$

Ratkaisuehdotus: Tämänkin menee suoraan määritelmää käyttäen:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\, ds &= \int_0^1 f(\gamma(t))\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2}\, dt = \int_0^1 f(0,0,t) \cdot 1\, dt \\ &= \int_0^1 0\, dt = \Big/_{0}^{1} c = 0.\end{aligned}$$

3.* (Martio HT 6.1:3) Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)$ ja $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Määritä

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s}.$$

Tehtäväsarja II

4.* Olkoon $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva säännöllinen polku ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva. Olkoon $\phi : [a,b] \to [0,1]$ C^1–diffeomorfismi ja määritellään polku $\tilde{\gamma}(t') = \gamma(\phi(t'))$. Laske integraalit

$$\int_\gamma f\, ds, \quad \int_{\tilde{\gamma}} f\, ds.$$

Mitä havaitset? **Huom.** Kuvaus ϕ ei välttämättä ole kasvava!

5. Olkoot γ ja $\tilde{\gamma}$ kuten edellisessä tehtävässä, ja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1–vektorikenttä. Laske integraalit

$$\int_\gamma F \cdot d\overline{s}, \quad \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot d\overline{s}.$$

Mitä nyt huomaat?

Ratkaisuehdotus: Oletukset ovat nyt samat kuin edellisessä tehtävässä eli $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ on C^1-diffeomorfismi. Martion kirjan mukaan

$$\int_{-\gamma} F \cdot d\overline{s} = -\int_\gamma F \cdot d\overline{s}$$

eli polun suunnan kääntäminen muuttaa integraalin arvon. Intgraali yli polun $\tilde{\gamma}$ on nyt määritelmän mukaan

$$\int_{\tilde{\gamma}} F \cdot d\overline{s} = \int_a^b F(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t)\, dt = \int_a^b F(\gamma(\phi(t'))) \cdot (\gamma'(\phi(t'))\phi'(t'))\, dt'.$$

Jos $\phi'(t') > 0$, niin muuttujanvaihdolla $t = \phi(t')$ saadaan, että

$$\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b F(\gamma(\phi(t'))) \cdot (\gamma'(\phi(t'))\phi'(t'))\, dt'.$$

Jos puolestaan $\phi'(t') < 0$, niin samalla muuttujan vaihdolla päädytään tilanteeseen

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt &= -\int_b^a F(\gamma(\phi(t'))) \cdot (\gamma'(\phi(t'))\phi'(t'))\, dt' \\ &= \int_a^b F(\gamma(\phi(t'))) \cdot (\gamma'(\phi(t'))\phi'(t'))\, dt'.\end{aligned}$$

6. (Martio, HT 6.1:4) Olkoon γ tason säännöllinen C^1–polku ja $T(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ sen *yksikkötangenttivektori*. Miten määritellään

$$\int_\gamma T(t) \cdot d\overline{s}\,?$$

Mikä se on?

Ratkaisuehdotus: Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ säännöllinen polku. Käytetään integraalin laskemiseen käyräintegraalin määritelmää. Tällöin saadaan, että

$$\int_\gamma T(t) \cdot d\overline{s} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

ja tämä on polun γ pituus.

Tehtäväsarja III

7. Käytetään kurssikirjan lauseen 6.2.1 (Greenin kaava) merkintöjä. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva, ja määritellään vektorikenttä F kaavalla $F = \nabla f$. Laske integraali

$$\oint_{\partial D} F \cdot d\overline{s}.$$

Ratkaisuehdotus: Geenin kaava sanoo, että

$$\oint_{\partial D} F \cdot d\overline{s} = \int\int_D (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\, dxdy,$$

kun $F : \Omega \to R^2$ on $C^1(\Omega)$-vektorikenttä. Nyt $F = \nabla f$ eli $F_1(x_1, x_2) = \partial_1 f(x_1, x_2)$ ja $F_2(x_1, x_2) = \partial_2 f(x_1, x_2)$, joten

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} F \cdot d\bar{s} &= \int\int_D (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\, dxdy \\
&= \int\int_D \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) - \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2)\, dxdy \\
&= \int\int 0\, dxdy = 0.
\end{aligned}$$

Tulosta vo verrata yhtälöön 6.1.11, jonka mukaan

$$\int_\gamma \nabla f \cdot d\bar{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

kun $\gamma : [a, b] \to D$ on C^1-polku (joka esittää reunaa ∂D). Nyt γ on umpinainen polku, joten $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$.

8. Olkoon $D = [0, 1] \times [0, 1]$ ja $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x, y) = x$. Laske Greenin kaavaa käyttäen integraali

$$\int_D \partial_1 f(x, y)\, dxdy.$$

Ratkaisuehdotus: Merkitään $F(x, y) = (0, x)$. Tällöin $\partial_1 F_2(x, y) = 1$ ja $\partial_2 F_1(x, y) = 0$. Selvästi F on jatkuvasti derivoituva vektorikenttä. Käyttämällä Greenin kaavaa saadaan, että

$$\begin{aligned}
\int_D \partial_1 f(x, y)\, dxdy = \int_D \partial_1 f(x, y) - 0\, dxdy &= \int_D \partial_1 F_2(x, y) - \partial_2 F_1(x, y)\, dxdy \\
= \int_D 1\, dxdy = 1.
\end{aligned}$$