Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 02.12.2016 klo 19.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 16.12.2016 klo 19.00

Tehtäväsarja I

1. (Martio, HT 6.1:1) Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektorikenttä $F(x, y) = (x, y)$ ja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ polku $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$. Määritä käyräintegraali

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s}.$$

2. (Martio, HT 6.1:2) Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_2$ ja $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, 0, t)$. Näytä, että

$$\int_\gamma f\, ds = 0$$

3.* (Martio HT 6.1:3) Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Määritä

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s}.$$

Tehtäväsarja II

4.* Olkoon $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva säännöllinen polku ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva. Olkoon $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ C^1–diffeomorfismi ja määritellään polku $\tilde{\gamma}(t') = \gamma(\phi(t'))$. Laske integraalit

$$\int_\gamma f\, ds, \quad \int_{\tilde{\gamma}} f\, ds.$$

Mitä havaitset? **Huom.** Kuvaus ϕ ei välttämättä ole kasvava!

5. Olkoot γ ja $\tilde{\gamma}$ kuten edellisessä tehtävässä, ja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1–vektorikenttä. Laske integraalit

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s}, \quad \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot d\bar{s}.$$

Mitä nyt huomaat?

6. (Martio, HT 6.1:4) Olkoon γ tason säännöllinen C^1–polku ja $T(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ sen *yksikkötangenttivektori*. Miten määritellään

$$\int_\gamma T(t) \cdot d\bar{s}\,?$$

Mikä se on?

Tehtäväsarja III

Tätä tehtäväsarjaa varten lue kurssikirjasta Greenin kaavaa tasossa käsittelevä kappale 6.2.

7. Käytetään kurssikirjan lauseen 6.2.1 (Greenin kaava) merkintöjä. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva, ja määritellään vektorikenttä F kaavalla $F = \nabla f$. Laske integraali
$$\oint_{\partial D} F \cdot d\overline{s}.$$

8. Olkoon $D = [0,1] \times [0,1]$ ja $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = x$. Laske Greenin kaavaa käyttäen integraali
$$\int \partial_1 f(x,y)\, dxdy.$$