Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 4 - Ratkaisuehdotuksia tähtitehtäviin

1.* Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Piirrä joukon $\{x \in \mathbb{R}^2; g(x) = 0\}$ kuvaaja ja tutki implisiittifunktiolauseen oletuksia funktiolle g pisteiden $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ ympäristöissä.

Ratkaisuehdotus: Joukon $\{x \in \mathbb{R}^2; g(x) = 0\}$ kuvaaja on tason yksikköympyrä. Pisteissä $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ funktion arvo 0, joten ehto $g(x_0) = 0$ pätee kummallekin pisteelle. Funktion g osittaisderivaat on

$$\partial_1 g(x_1, g_2) = 2x_1 \quad \text{ja} \quad \partial_2 g(x_1, x_2) = 2x_2,$$

joten $\partial_1(1, 0) = 2 \neq 0$ ja $\partial_2(0, 1) = 2 \neq 0$. Implisiittifunktiolauseen ehdot ovat voimassa, joten tiedetään, että yhtälöllä $g(x) = 0$ on ratkaisu pisteen $(1, 0)$ ympäristössä muuttujan x_1 suhteen ja pisteen $(0, 1)$ ympäristössä sillä on ratkaisu muuttujan x_2 suhteen.

4.* Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $0 \in U$ ja $g : U \to \mathbb{R}$ differentioituva. Oletetaan, että $g(0, 0) = 0$ ja $\partial_{x_1} g(0, 0) \neq 0$. Tarkastellaan funktiota $G : U \to \mathbb{R}^2$,

$$G(x_1, x_2) = (g(x_1, x_2), x_2).$$

Osoita, että G on lokaalisti kääntyvä origossa, eli että on olemassa origon ympäristöt U' ja V' siten, että $G : U' \to V'$ ja on olemassa differentioituva käänteiskuvaus $H = G^{-1} : V' \to U'$.

Ratkaisuehdotus: Funktio G on lokaalisti kääntyvä origossa käänteiskuvauslauseen mukaan, jos G on C^1-funktio ja Jacobin determinantin arvo origossa on eri suuri kuin nolla. Oletuksen nojalla g on differentioituva. Oletuksiin pitäisi lisätä se, että g on jatkuvasti differentioituva eli g on C^1-funktio. Jos g on C^1-funktio, niin pätee, että

$$\det \begin{bmatrix} \partial_1 G_1(0,0) & \partial_2 G_1(0,0) \\ \partial_1 G_2(0,0) & \partial_2 G_2(0,0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \partial_1 g(0,0) & \partial_2 g(0,0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \partial_1 g(0,0) \neq 0$$

oletuksen mukaan. Siis funktio G on kääntyvä origon ympäristössä U' ja on olemassa käänteiskuvaus $H : V' \to U'$.

7.* Osoita edellistä tehtävää käyttäen, että kun $(x_1, x_2) \in U'$, niin ehto $g(x_1, x_2) = 0$ on yhtäpitävää sen kanssa että $x_1 = h(0, x_2)$. Kun siis valitsemme $\phi(x_2) = h(0, x_2)$, on implisiittifunktiolause todistettu.

Ratkaisuehdotus: Olkoon $y_1, x_2 \in V'$. Oletetaan, että $g(x_1, x_2) = 0$. Tehtävän 5 nojalla tiedetään, että $h(g(x_1, x_2), x_2) = x_1$. Oletuksen nojalla saadaan, että $h(0, x_2) = x_1$.

Oletetaan sitten, että $h(0, x_2) = x_1$.Tehtävän 6 nojalla tiedetään, että $g(h(y_1, x_2), x_2) = y_1$. Sijoitetetaan $y_1 = 0$, joilloin oletuksen nojalla saadaan, että $g(h(0, x_2), x_2) = g(x_1, x_2) = 0$.