Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 4 - Ratkaisuehdotuksia tähdettömiin tehtäviin

Tehtäväsarja I

1.* Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Piirrä joukon $\{x \in \mathbb{R}^2; g(x) = 0\}$ kuvaaja ja tutki implisiittifunktiolauseen oletuksia funktiolle g pisteiden $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ ympäristöissä.

2. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Osaatko eksplisiittisesti ratkaista yhtälön $g(x) = 0$ pisteiden $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ ympäristöissä? Mikä on näiden ratkaisufunktioiden laajin mahdollinen määrittelyjoukko?

   Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan yhtälö ensin muuttujan x_1 suhteen. Yhtälön ratkaisu on

$$x_1 = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

   Yhtälöllä on siis ratkaisu pisteen $(1, 0)$ ympäristössä U, kun $U = \{x \in S^1 \mid -1 \leq x_2 \leq 1\}$. Muuttujan x_2 suhteen yhtälöllä on puolestaan ratkaisu

$$x_2 = \pm\sqrt{1 - x_2}.$$

   Täten yhtälöllä on ratkaisu pisteen $(0, 1)$ ympäristössä V, kun $V = \{x \in S^1 \mid -1 \leq x_1 \leq 1\}$. Tässä U ja V ovat siis suurimmat mahdolliset ratkaisujoukot.

3. Tutkitaan yhtälöä

$$xe^{y+z} - \sin(x + y + z) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   Mitä osaat sanoa tämän yhtälön ratkeavuudesta pisteen $(0, \pi, 0)$ ympäristössä?

   Ratkaisuehdotus: Ei etsitä yhtälölle eksplisiittistä ratkaisua vaan tutkitaan implisiittifunktiolauseen avulla onko yhtälöllä olemassa ratkaisua pisteen $(0, \pi, 0)$ ympäristössä. Merkitään $g(x, y, z) = xe^{y+z} - \sin(x + y + z)$. Ensin huomataan, että

$$g(0, \pi, 0) = 0 \cdot e^{pi+0} - \sin(0 + \pi + 0) = 0,$$

   joten implisiittifunktiolauseen ensimmäinen ehto on voimassa. Lasketaan seuraavaksi osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(x, y, z) &= e^{y+z} - \cos(x + y + z) \\
\partial_2 g(x, y, z) &= xe^{y+z} - \cos(x + y + z) \\
\partial_3 g(x, y, z) &= xe^{y+z} - \cos(x + y + z).
\end{aligned}$$

   Osittaisderivaattojen arvot pisteessä $(0, \pi, 0)$ on siten

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(0, \pi, 0) &= e^{\pi} - \cos(\pi) = e^{\pi} + 1 \\
\partial_2 g(0, \pi, 0) &= -\cos(\pi) = 1 \\
\partial_3 g(0, \pi, 0) &= -\cos(\pi) = 1.
\end{aligned}$$

   Yhtälöllä on siis ratkaisu pisteen $(0, \pi, 0)$ ympäristössä kaikkien muuttujien suhteen.

Tehtäväsarja II

4.* Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $0 \in U$ ja $g : U \to \mathbb{R}$ differentioituva. Oletetaan, että $g(0,0) = 0$ ja $\partial_{x_1} g(0,0) \neq 0$. Tarkastellaan funktiota $G : U \to \mathbb{R}^2$,

$$G(x_1, x_2) = (g(x_1, x_2), x_2).$$

Osoita, että G on lokaalisti kääntyvä origossa, eli että on olemassa origon ympäristöt U' ja V' siten, että $G : U' \to V'$ ja on olemassa differentioituva käänteiskuvaus $H = G^{-1} : V' \to U'$.

5. Olkoot H, U' ja V' kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että H on muotoa

$$H(y_1, y_2) = (h(y_1, y_2), y_2),\ (y_1, y_2) \in V',$$

missä funktio $h : V' \to \mathbb{R}$ on differentioutuva.

Ratkaisuehdotus: Kuvaus H on kuvaus $V' \to U'$, missä $V', U' \in \mathbb{R}^2$. Se on siis muotoa $H(y_1, y_2) = (h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2))$, missä h_1 ja h_2 ovat differentioituvia. Tämän lisäksi tiedetään, että tulee päteä $H(G(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$, koska H on kuvauksen G käänteiskuvaus. Tästä saadaan, että

$$H(G(x_1, x_2)) = H(g(x_1, x_2), x_2) = (h_1(g(x_1, x_2), x_2), h_2(g(x_1, x_2), x_2)) = (x_1, x_2),$$

joten $h_2(y_1, y_2) = y_2$.

6. Osoita, että

$$g(h(y_1, x_2), x_2) = y_1,\ (y_1, x_2) \in V'.$$

Ratkaisuehdotus: Olkoon $(y_1, x_2) \in V'$. Koska H ja G ovat toistensa käänteiskuvauksia, tulee päteä että $G(H(y_1, y_2)) = (y_1, y_2)$. Tästä saadaan, että

$$G(H(y_1, x_2)) = G(h(y_1, x_2), x_2) = (g(h(y_1, x_2), x_2), x_2) = (y_1, x_2).$$

Siis $g(h(y_1, x_2), x_2) = y_1$.

7.* Osoita edellistä tehtävää käyttäen, että kun $(x_1, x_2) \in U'$, niin ehto $g(x_1, x_2) = 0$ on yhtäpitävää sen kanssa että $x_1 = h(0, x_2)$. Kun siis valitsemme $\phi(x_2) = h(0, x_2)$, on implisiittifunktiolause todistettu.

Tehtäväsarja III

8. Olkoon $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$, ja $f(x, y) = y$. Laske integraali

$$\int_\gamma f\, ds.$$

Ratkaisuehdotus: Määritelmä sanoo, että

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^\pi f(\cos(t), \sin(t)) \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2}\, dt.$$

Laskemalla saadaan, että

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\cos(t), \sin(t)) \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2}\, dt &= \int_0^\pi \sin(t) \cdot 1\, dt \\ &= \Big/_0^\pi - \cos(t) \\ &= 2. \end{aligned}$$

9. Olkoon $\tilde{\gamma}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1,1]$ ja f kuten edellisessä tehtävässä. Laske integraali

$$\int_{\tilde{\gamma}} f\, ds.$$

Mitä huomaat? Osaatko selittää havaintosi?

Ratkaisuehdotus: Lasketaan tämä samalla tavalla, kuin edellisessä tehtävässä. Nyt siis

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\gamma}} f\, ds &= \int_{-1}^{1} f(t, \sqrt{1-t^2}) \sqrt{1^2 + \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{(1-t^2)\left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right)}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2+t^2}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2.
\end{aligned}$$

Huomataan, että integraalin arvo on sama kuin edellisessä tehtävässä. Niin pitääkin olla, koska polut γ ja $\tilde{\gamma}$ ovat samat.

10. Olkoon $F(x,y) = (-y, x)$ vektorikenttä, ja $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, umpinainen polku. Laske integraali

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\overline{s}.$$

Ratkaisuehdotus: Määritelmän mukaan

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\overline{s} = \int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt.$$

Tästä saadaan laskemalla, että

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1\, dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$