Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 25.11.2016 klo 19.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 09.12.2016 klo 19.00

Tehtäväsarja I

Tässä tehtäväsarjassa tutustumme *implisiittifunktiolauseeseen.*

Implisiittifunktiolause. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ja $g : U \to \mathbb{R}$ differentioituvaa funktio. Oletetaan, että pisteessä $x_0 = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_n) \in U$ pätee $g(x_0) = 0$ ja $\partial_{x_k} g(x_0) \neq 0$. Tällöin on olemassa pisteen $(x_0)_k$ sisältävä avoin väli I, pisteen $x_0' = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_{k-1}, (x_0)_{k+1}, \ldots, (x_0)_n)$ avoin $\mathbb{R}^{n-1}$–ympäristö V, sekä differentioituva kuvaus $\phi : V \to I$ siten että

$$g(x) = 0, \quad x \in \tilde{U}$$

on yhtäpitävää sen kanssa että

$$x_k = \phi(x'),\ x_k \in I,\ x' \in V.$$

Yllä olemme merkinneet $\tilde{U} = \{x \in U;\ x_k \in I,\ x' \in V\}$.

Intuitiivisesti implisiittifunktiolauseen voi tulkita seuraavasti: ehdoista $g(x_0) = 0$, $\partial_{x_k} g(x_0) \neq 0$, seuraa, että jossain pisteen x_0 ympäristössä voimme yksikäsitteisesti ratkaista yhtälön $g(x) = 0$ muuttujan x_k–suhteen ja ratkaisu on pinta $x_k = \phi(x')$. Nimitys *Implisiittifunktiolause* johtuu siitä, ettei yleensä ole mahdollista *eksplisiittisesti* sanoa, mikä funktio ϕ on. Tiedämme ainoastaan, että sellainen on olemassa, eli tunnemme sen *implisiittisesti.*

1.* Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Piirrä joukon $\{x \in \mathbb{R}^2; g(x) = 0\}$ kuvaaja ja tutki implisiittifunktiolauseen oletuksia funktiolle g pisteiden $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ ympäristöissä.

2. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Osaatko eksplisiittisesti ratkaista yhtälön $g(x) = 0$ pisteiden $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ ympäristöissä? Mikä on näiden ratkaisufunktioiden laajin mahdollinen määrittelyjoukko?

3. Tutkitaan yhtälöä
$$xe^{y+z} - \sin(x + y + z) = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$
Mitä osaat sanoa tämän yhtälön ratkeavuudesta pisteen $(0, \pi, 0)$ ympäristössä?

Tehtäväsarja II

Tässä tehtäväsarjassa todistamme implisiittifunktiolauseen tapauksessa $n = 2$. Oletamme myös, että $x_0 = 0$. Korkeampiulotteinen tapaus todistetaan aivan samoin. Edelleen, oletuksen $x_0 = 0$ saamme aina voimaan sopivalla koordinaatiston siirrolla.

4.* Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $0 \in U$ ja $g : U \to \mathbb{R}$ differentioituva. Oletetaan, että $g(0, 0) = 0$ ja $\partial_{x_1} g(0, 0) \neq 0$. Tarkastellaan funktiota $G : U \to \mathbb{R}^2$,
$$G(x_1, x_2) = (g(x_1, x_2), x_2).$$
Osoita, että G on lokaalisti kääntyvä origossa, eli että on olemassa origon ympäristöt U' ja V' siten, että $G : U' \to V'$ ja on olemassa differentioituva käänteiskuvaus $H = G^{-1} : V' \to U'$.

5. Olkoot H, U' ja V' kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että H on muotoa

$$H(y_1, y_2) = (h(y_1, y_2), y_2),\ (y_1, y_2) \in V',$$

missä funktio $h : V' \to \mathbb{R}$ on differentioutuva.

6. Osoita, että

$$g(h(y_1, x_2), x_2) = y_1,\ (y_1, x_2) \in V'.$$

7.* Osoita edellistä tehtävää käyttäen, että kun $(x_1, x_2) \in U'$, niin ehto $g(x_1, x_2) = 0$ on yhtäpitävää sen kanssa että $x_1 = h(0, x_2)$. Kun siis valitsemme $\phi(x_2) = h(0, x_2)$, on implisiittifunktiolause todistettu.

Tehtäväsarja III

Tätä tehtäväsarjaa varten lue kurssikirjasta käyräintegraaleja käsittelevä kappale 6.1

8. Olkoon $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$, ja $f(x, y) = y$. Laske integraali

$$\int_\gamma f\, ds.$$

9. Olkoon $\tilde{\gamma}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$, $t \in [-1, 1]$ ja f kuten edellisessä tehtävässä. Laske integraali

$$\int_{\tilde{\gamma}} f\, ds.$$

Mitä huomaat? Osaatko selittää havaintosi?

10. Olkoon $F(x, y) = (-y, x)$ vektorikenttä, ja $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, umpinainen polku. Laske integraali

$$\oint_\gamma F \cdot d\overline{s}.$$