Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 3 - Ratkaisuehdotuksia tähtitehtäviin

2.* (Martio HT 2.9:2) Määritä edellisen tehtävän funktion f lokaalit ääriarvokohdat.

Ratkaisuehdotus: Lasketaan funktion f Hessen matriisi pisteissä $(0, y, y^3)$:

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x,y,z) & \partial_1\partial_2 f(x,y,z) & \partial_1\partial_3 f(x,y,z) \\ \partial_2\partial_1 f(x,y,z) & \partial_2\partial_2 f(x,y,z) & \partial_2\partial_3 f(x,y,z) \\ \partial_3\partial_1 f(x,y,z) & \partial_3\partial_2 f(x,y,z) & \partial_3\partial_3 f(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -9y^2 & 3 \\ -9y^2 & -18xy & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(0,y,y^3) = \begin{pmatrix} 0 & -9y^2 & 3 \\ -9y^2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hessen matriisin ominaisarvoiksi saadaan täten:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -9y^2 & 3 \\ -9y^2 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &= 3 \cdot (-9y^2 \cdot 0 - (-\lambda) \cdot 3) - \lambda \cdot (-\lambda \cdot (-\lambda) - (-9y^2) \cdot (-9y^2)) \\ &= 9\lambda - \lambda^3 + 81y^4 \cdot \lambda = \lambda(9 + 81y^4 - \lambda^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ tai } \lambda = \pm\sqrt{9 + 81y^2}. \end{aligned}$$

Siis matriisilla on kolme ominaisarvoa, joista yksi on nolla, yksi on positiivinen ja yksi on negatiivinen. Täten kriittiset pisteet on aina satulapisteitä.

6.* Ehto $x^2 + (y+z)^2 + (y-z)^2 = 1$ määrittelee $\mathbb{R}^3$:n pinnan S. Määritä tämän pinnan pisteeseen $(0, 1/2, 1/2)$ piirretyn tangentin yhtälö. Onko pinta S avaruuden $\mathbb{R}^3$ rajoitettu osajoukko?

Ratkaisuehdotus: Määritellään $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^1$. Tällöin $f(x,y,z) = 1$ on tasa-arvojoukko. Tiedetään, että funktion gradientti on kohtisuorassa tasa-arvojoukkoa vastaan, joten tangenttitason yhtälö saadaan ratkaisemalla funktion f gradientti pisteessä $(0, 1/2, 1/2)$. Se saadaan helposti laskemalla:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 4z) \Rightarrow \nabla f(0, 1/2, 1/2) = (0, 2, 2).$$

Täten tangenttitaso muodostuu pisteistä (x,y,z), jotka toteuttaa yhtälön

$$0 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 1/2) + 2 \cdot (z - 1/2) = 0$$

eli tangenttitaso on muotoa $2y + 2z = 2$.

Pinta S on avaruuden $\mathbb{R}^3$ rajoitettu osajoukko, koska S on ellipsi, jonka määrää yhtälö $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ eli yhtälö

$$(x-0)^2 + \frac{(y-0)^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{(z-0)^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1.$$