Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 3 - Ratkaisuehdotuksia tähdettömiin tehtäviin

Tehtäväsarja I

1. (Martio, HT 2.9:1) Määritä funktion $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x^4 - 3xy^3 + 3xz + 2,$$

kriittiset pisteet.

Ratkaisuehdotus: Lasketaan gradientin nollakohdat:

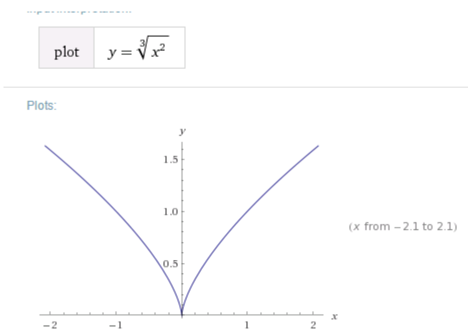
$$\nabla f(x,y,z) = (4x^3 - 3y^3 + 3z, -9xy^2, 3x) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow x = 0, \quad y = y \quad \text{ja} \quad z = y^3.$$

Funktion f kriittiset pisteet on siis kaikki muotoa $(0,y,y^3)$ olevat pisteet.

2.* (Martio HT 2.9:2) Määritä edellisen tehtävän funktion f lokaalit ääriarvokohdat.

3. (Martio, HT 2.9:11) Olkoon $\{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y^3 - x^2 = 0\}$. Onko funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$ suurinta tai pienintä arvoa?

Ratkaisuehdotus: Hahmotellaan siis kuvaa joukosta A:



Analyysin kursseilta muistetaan, että tämä funktio ei ole derivoituva origossa. Sillä on kuitenkin selvästi pienin arvo origossa, mutta ei suurinta arvoa. Osoitetaan, että funktio $f : A \to \mathbb{R}$ ei ole derivoituva origossa, joten tehtävän ratkaisuksi ei voida käyttää kriittisten pisteiden etsimistä (koska tämän vaatimuksena on se, että funktio on jatkuvasti derivoituva!).

Käsiä heiluttamalla nähdään, että funktiolla ei ole suurinta arvoa, koska $y = \sqrt[3]{x^2}$ kasvaa x^2:n kasvaessa. Origissa funktiolla taas on pienin arvo, koska $\sqrt[3]{x^2}$ on aina suurempaa kuin nolla, kun $x^2 > 0$. Funktion pienin arvo on siis 0.

Tehtäväsarja II

4. Tarkastellaan polkuja $\gamma(t) = (t,t^2)$, $t \in [0,1]$ ja $\lambda(s) = (s^{1/2}, s)$, $s \in [0,1]$. Vertaa näiden polkujen pituuksia toisiinsa. Mitä huomaat? Perustele vastauksesi huolella laskemalla.

Ratkaisuehdotus: Polun pituus lasketaan kaavalla

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Nyt siis polkujen γ ja λ pituudet on

$$\int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^1 (1+4t^2)^{1/2}\, dt \quad \text{ja} \quad \int_0^1 |\lambda'(s)|\, ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{4s}+1\right)^{1/2} ds.$$

Polut ovat kuitenkin samat, joten olisi luultavaa, että niiden pituudet ovat samat. Osoitetaan siis tämä.

Osoitetaan väite muuttujanvaihdolla (mutta ei lasketa integraalin arvoa). Merkitään $s = t^2$. Tällöin $ds = 2tdt = 2\sqrt{2}dt$. Tehdään sitten sijoitus ja lasketaan:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+4t^2)^{1/2}\, dt &= \int_0^1 (1+4s)^{1/2} \frac{ds}{2\sqrt{s}} = \int_0^1 \frac{(1+4s)^{1/2}}{(4s)^{1/2}}\, ds \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1+4s}{4s}\right)^{1/2} ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{4s}+1\right)^{1/2} ds.\end{aligned}$$

Saatiin siis osoitettua se, mitä pitikin.

5. (Martio HT 3.1:2) Olkoon $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ partikkelin "polku". Oletetaan, että $\gamma(0) = (0,0,1)$ ja $\gamma'(0) = (1,1,0)$ sekä $\gamma''(t) = (0,0,-1)$ kaikilla $t \geq 0$. Millä "hetkellä" $t > 0$ partikkeli siirtyy xy–tason alapuolelle ja missä xy–tason pisteessä tämä tapahtuu?

Ratkaisuehdotus: Oletusten nojalla tiedetään, että

$$\begin{cases} \gamma_1''(t) = 0 \\ \gamma_2''(t) = 0 \\ \gamma_3''(t) = -1, \end{cases}$$

joten

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = at + b \\ \gamma_2(t) = ct + d \\ \gamma_3(t) = -\frac{1}{2}t^2 + et + f, \end{cases}$$

missä $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Lisäksi oletusten nojalla tiedetään, että

$$\gamma_1'(0) = a = 1 = c = \gamma_2'(0).$$

Tästä saadaan, että

$$\gamma_1(t) = t + b \text{ ja } \gamma_2(t) = t + d.$$

Koska oletuksissa on lisäksi, että $\gamma_1(0) = 0$ ja $\gamma_2(0) = 0$, saadaan että $\gamma_1(t) = t = \gamma_2(t)$. Samanlaisella pyörittelyllä saadaa, että $\gamma_3(t) = -1/2t^2 + 1$.

Tehtäväntona on ratkaista se piste, jossa z-koordinaatti vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi. Se saadaan ratkaisemalla

$$-\frac{1}{2}t^1 + 1 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}.$$

Kun $t = \sqrt{2}$, niin

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0),$$

joten siirtyminen xy-tason alapuolella tapahtuu hetkellä $t = \sqrt{2}$ ja se tapahtuu xy-tason pisteessä $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

6.* Ehto $x^2 + (y+z)^2 + (y-z)^2 = 1$ määrittelee $\mathbb{R}^3$:n pinnan S. Määritä tämän pinnan pisteeseen $(0, 1/2, 1/2)$ piirretyn tangentin yhtälö. Onko pinta S avaruuden $\mathbb{R}^3$ rajoitettu osajoukko?

Tehtäväsarja III

7. Määritä kuvauksen $f(x,y) = (xe^y, x-y)$ Jacobin determinantti, ja tutki missä pisteissä se on nollasta poikkeava.

   Ratkaisuehdotus: Lasketaan funktion f Jacobin determinantti eli $\det f'(x,y)$:

$$\det f'(x,y) = \det \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -e^y - xe^y.$$

   Jacobin determinantti on nollasta poikkeava, kun

$$-e^y - xe^y \neq 0 \Leftrightarrow -e^y \neq xe^y \Leftrightarrow -1 \neq x.$$

   Siis pisteissä (x,y), $x \neq -1$,Jacobin determinantti on nollasta poikkeava.

8. Määritä ne $\mathbb{R}^3$:n pisteet, joissa kuvaus

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2, z, x^2 + y^2)$$

   on lokaalisti kääntyvä.

   Ratkaisuehdotus: Käänteiskuvauslauseen mukaan kuvaus f on lokaalisti kääntyvä niissä pisteissä, joissa Jacobin determinantti on eri suuri kuin nolla. Ratkaistaan siis Jacobin determinantin nollakohdat:

$$\det f'(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (2x \cdot 2y - (-2y) \cdot 2x) = 4xy + 4xy = 8xy.$$

   Jacobin determinantti on siis nolla, kun $x = 0$ tai $y = 0$.