

## Vektorianalyysi II

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2016

Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 18.11.2016 klo 19.00

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 02.12.2016 klo 19.00

### Tehtäväsarja I

1. (Martio, HT 2.9:1) Määritä funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = x^4 - 3xy^3 + 3xz + 2,$$

kriittiset pisteet.

- 2.\* (Martio HT 2.9:2) Määritä edellisen tehtävän funktion  $f$  lokaalit ääriarvokohdat.

Seuraavaa ääriarvongelmaa kannattaa lähestyä avoimin mielin. Kuvan hahmottelu saattaa auttaa :)

3. (Martio, HT 2.9:11) Olkoon  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^3 - x^2 = 0\}$ . Onko funktiolla  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y$  suurinta tai pienintä arvoa?

### Tehtäväsarja II

4. Tarkastellaan polkuja  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$  ja  $\lambda(s) = (s^{1/2}, s)$ ,  $s \in [0, 1]$ . Vertaa näiden polkujen pituuksia toisiinsa. Mitä huomaat? Perustele vastauksesi huolella laskemalla.

5. (Martio HT 3.1:2) Olkoon  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  partikkelin "polku". Oletetaan, että  $\gamma(0) = (0, 0, 1)$  ja  $\gamma'(0) = (1, 1, 0)$  sekä  $\gamma''(t) = (0, 0, -1)$  kaikilla  $t \geq 0$ . Millä "hetkellä"  $t > 0$  partikkeli siirtyy  $xy$ -tason alapuolelle ja missä  $xy$ -tason pisteessä tämä tapahtuu?

- 6.\* Ehto  $x^2 + (y + z)^2 + (y - z)^2 = 1$  määrittelee  $\mathbb{R}^3$ :n pinnan  $S$ . Määritä tämän pinnan pisteeseen  $(0, 1/2, 1/2)$  piirretyn tangentin yhtälö. Onko pinta  $S$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  rajoitettu osajoukko?

### Tehtäväsarja III

Tätä tehtäväsarjaa varten lue kurssikirjasta Käänteiskuvauslausetta käsittelevä kappale 3.3

7. Määritä kuvauksen  $f(x, y) = (xe^y, x - y)$  Jacobin determinantti, ja tutki missä pisteissä se on nolosta poikkeava.

8. Määritä ne  $\mathbb{R}^3$ :n pisteet, joissa kuvaus

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, z, x^2 + y^2)$$

on lokaalisti kääntyvä.