Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 2 - Ratkaisuehdotuksia tähtitehtäviin

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin.

2.* Tarkastellaan neliömuotoa

$$Q(h) = Q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2 + 2h_3^2, \quad h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Kirjoita $Q(h)$ muodossa $\langle h, Ah\rangle$, missä $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ standardi sisätulo, ja A on neliömatriisi.

(b) Määritä edellisen kohdan matriisin A ominaisarvot.

(c) Määritä neliömuodon Q laatu.

Ratkaisuehdotus:

(a) Lasketaan $\langle h, Ah\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle h, Ah\rangle &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{13}h_3 \\ a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + a_{23}h_3 \\ a_{31}h_1 + a_{32}h_2 + a_{33}h_3\end{pmatrix} \\ &= (a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{13}h_3)h_1 + (a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + a_{23}h_3)h_2 + (a_{31}h_1 + a_{32}h_2 + a_{33}h_3)h_3.\end{aligned}$$

Tästä voidaan päätellä, että

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Täten

$$\langle h, Ah\rangle = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} h_1 - h_2 \\ -h_1 + h_2 \\ 2h_3\end{pmatrix}.$$

(b) Lasketaan ominaisarvot ratkaisemalla yhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda \in \{0, 2\}.\end{aligned}$$

(c) Koska yksi ominaisarvoista on nolla, on neliömuoto positiivisesti semidefiniitti. Tämän näkee myös tarkastelemalla pisteitä $(h, h, 0)$, missä $h > 0$. Tällöin nimittäin

$$Q(h, h, 0) = h^2 - 2hh + h^2 = 2h^2 - 2h^2 = 0.$$

3.* Määritä funktion

$$f(x, y, z) = z^2 - e^{x^2+y^2}$$

origossa olevan kriittisen pisteen laatu.

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan Hessen matriisin ominaisarvot. Hessen matriisi on

$$\begin{aligned} D^2 f(0,0,0) &= \begin{pmatrix} \partial_{11} f(0,0,0) & \partial 12 f(0,0,0) & \partial_{13} f(0,0,0) \\ \partial_{21} f(0,0,0) & \partial 22 f(0,0,0) & \partial_{23} f(0,0,0) \\ \partial_{31} f(0,0,0) & \partial 32 f(0,0,0) & \partial_{33} f(0,0,0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diagonaalimatriisin ominaisarvot on sen diagonaalialkiot, joten matriisi on indefiniitti. Origo on siten satulapiste.