Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 2 - Ratkaisuehdotuksia tähdettömiin tehtäviin

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin.

Tehtäväsarja I

1. Anna esimerkki $\mathbb{R}^3$:n neliömuodosta Q, joka on

   (a) postiivisesti definiitti,

   (b) negatiivisesti definiitti,

   (c) indefiniitii,

   (d) Postitiivisesti semidefiniitti, muttei positiivisesti definiitti.

   Ratkaisuehdotus: Kolmen muuttujan neliömuodot on huomauksen 2.9.11 mukaan muotoa

   $$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz,$$

   $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

   (a) Neliömuoto
   $$x^2 + y^2 + z^2 > 0$$
   kaikilla $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, joten se on positiivisesti definiitti.

   (b) Neliömuoto
   $$-x^2 - y^2 - z^2 < 0$$
   kaikilla $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, joten se on positiivisesti definiitti.

   (c) Neliömuoto
   $$x^2 + y^2 - z^2$$
   saa sekä positiivisia, että negatiivia arvoja, joten se on indefiniitti.

   (d) Neliömuoto
   $$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2$$
   positiivisesti semidefiniitti ja ei positiivisesti definiitti, koska $(x+y+z)^2 \geq 0$ kaikilla (x, y, z) ja $(x + y + z)^2 = 0$, kun $x + y + z = 0$.

2.* Tarkastellaan neliömuotoa

   $$Q(h) = Q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2 + 2h_3^2, \quad h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Kirjoita $Q(h)$ muodossa $\langle h, Ah\rangle$, missä $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ standardi sisätulo, ja A on neliömatriisi.

   (b) Määritä edellisen kohdan matriisin A ominaisarvot.

   (c) Määritä neliömuodon Q laatu.

Tehtäväsarja II

3.* Määritä funktion

$$f(x, y, z) = z^2 - e^{x^2+y^2}$$

origossa olevan kriittisen pisteen laatu.

4. Määritä funktion

$$g(x, y, z) = x^2 \cos(y^2 - z^2) + \sin(y^2 + x^2)$$

origossa olevan kriittisen pisteen laatu.

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan Hessen matriisin ominaisarvot. Hessen matriisi on

$$D^2g(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

joten matriisin ominaisarvot on 4,2 ja 0. Matriisi on siis semidefiniitti, joten ominaisarvon käytöstä pitää tutkia vielä erikseen (ja rehellisyyden nimissä kyseisen Hessen matriisin laskeminen käsin on aika kivuliasta...)

Funktion arvo origossa on 0, joten tutkitaan onko origon ympäristössä sen arvot kaikki positiivisia tai negatiivisia. Tehdään akateeminen arvaus ja osoitetaan, että ne on kaikki positiivisia. Valitaan piste $(h, k, p) \in B((0, 0, 0), 1)$, $(h, k, p) \neq (0, 0, 0)$. Tälle pisteelle pätee, että

$$h^2 \cos(k^2 - p^2) + \sin(h^2 + k^2) > 0.$$

Tehtäväsarja III

5. (Martio, t. 3.1:1) Olkoon $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Osoita, että $\gamma(t)$ ja $\gamma'(t)$ ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden, ja että $\gamma''(t)$ on vastakkaissuuntainen vektoriin $\gamma(t)$ nähden.

Ratkaisuehdotus: Tiedetään, että $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. Tällöin

$$\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = (\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) = -\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t) = 0,$$

joten $\gamma(t)$ ja $\gamma'(t)$ on kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lisäksi tiedetään, että $\gamma''(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$. Mutta nyt

$$(-\cos(t), -\sin(t)) = -(\cos(t), \sin(t)) = -\gamma(t),$$

joten $\gamma''(t)$ on vastakkaissuuntainen vektorin $\gamma(t)$ kanssa.

6. Tulkitaan polun γ arvo pisteessä t, $\gamma(t)$, pisteen paikkavektoriksi hetkellä t. Tällöin $\gamma'(t)$ on nopeusvektori hetkellä t, ja $|\gamma'(t)|$ pisteen vauhti. Tarkastellaan pistettä, joka kulkee vakiovauhdilla. Osoita, että kiihtyvyysvektori $\gamma''(t)$ on kohtisuorassa nopeusvektoria vastaan.

Ratkaisuehdotus: Jos nopeus on vakio joka hetkellä t, niin $|\gamma'(t)| = c$. Tällöin $|\gamma'(t)|^2 = c^2$ ja

$$\frac{d}{dt}|\gamma'(t)|^2 = 0 \Rightarrow 2\gamma_1'(t)\gamma_1''(t) + 2\gamma_2'(t)\gamma_2''(t) = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \gamma'(t) \cdot \gamma''(t) &= (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \cdot (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t)) \\ &= \gamma_1'(t)\gamma_1''(t) + \gamma_2'(t)\gamma_2''(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

7. Määritä $\mathbb{R}^3$:n pinnan $z = xy + x$ pisteeseen $(0,0,0)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

Ratkaisuehdotus: Kappaleessa 3.2 sanotaan, että tangenttitaso koostuu niistä vektoreista $\bar{x}$, joilla

$$(\bar{x} - r(x,y)) \cdot (\partial_1 r(x,y) \times \partial_2 r(x,y)) = 0.$$

Merkitään $r(x,y) = (x, y, xy + x)$. Nyt $\partial_1 r(x,y) = (1, 0, y+1)$ ja $\partial_2 r(x,y) = (0, 1, x)$, joten

$$\partial_1 r(x,y) \times \partial_2 r(x,y)) = (1,0,1) \times (0,1,0) = (-1,0,1).$$

Tästä jatkamalla saadaan, että

$$\begin{aligned}(x,y,z) - r(0,0)) \cdot (-1,0,1) = 0 &\Leftrightarrow (x,y,z) \cdot (-1,0,1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + z = 0.\end{aligned}$$

Siis pyydetty tangenttitason yhtälö on $-x + z = 0$.