

Vektorianalyysi II

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2016

Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 11.11.2016 klo 19.00

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 25.11.2016 klo 19.00

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin.

Tehtäväsarja I

Seuraavia tehtäviä varten lue huolella läpi kurssikirjan kappale 2.9.

1. Anna esimerkki \mathbb{R}^3 :n neliömuodosta Q , joka on
 - (a) positiivisesti definiitti,
 - (b) negatiivisesti definiitti,
 - (c) indefiniitti,
 - (d) Positiivisesti semidefiniitti, muttei positiivisesti definiitti.

2.* Tarkastellaan neliömuotoa

$$Q(h) = Q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2 + 2h_3^2, \quad h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- (a) Kirjoita $Q(h)$ muodossa $\langle h, Ah \rangle$, missä $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on avaruuden \mathbb{R}^3 standardi sisätulo, ja A on neliömatriisi.
- (b) Määritä edellisen kohdan matriisin A ominaisarvot.
- (c) Määritä neliömuodon Q laatu.

Tehtäväsarja II

3.* Määritä funktion

$$f(x, y, z) = z^2 - e^{x^2+y^2}$$

origossa olevan kriittisen pisteen laatu.

4. Määritä funktion

$$g(x, y, z) = x^2 \cos(y^2 - z^2) + \sin(y^2 + x^2)$$

origossa olevan kriittisen pisteen laatu.

Tehtäväsarja III

Tätä tehtäväsarjaa varten lue kurssikirjasta kappaleet 3.1 ja 3.2.

5. (Martio, t. 3.1:1) Olkoon $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Osoita, että $\gamma(t)$ ja $\gamma'(t)$ ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden, ja että $\gamma''(t)$ on vastakkaissuuntainen vektoriin $\gamma(t)$ nähden.
6. Tulkitaan polun γ arvo pisteessä t , $\gamma(t)$, pisteen paikkavektoriksi hetkellä t . Tällöin $\gamma'(t)$ on nopeusvektori hetkellä t , ja $|\gamma'(t)|$ pisteen vauhti. Tarkastellaan pistettä, joka kulkee vakiovauhdilla. Osoita, että kiihtyvyyksvektori $\gamma''(t)$ on kohtisuorassa nopeusvektoria vastaan.
7. Määritä \mathbb{R}^3 :n pinnan $z = xy + x$ pisteeseen $(0, 0, 0)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.