Vektorianalyysi II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 1 - Ratkaisuehdotuksia tähtitehtäviin

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa kertaustehtäviä lineaarialgebrasta ja Taylorin polynomeista.

2.* Määritä seuravien 2×2 matriisien ominaisarvot ja -vektorit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisuehdotus: Merkitään

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ominaisarvot saadaan ratkaisemalla yhtälöt

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{ja} \quad \det(B - \lambda I) = 0.$$

Tulee siis ratkaista

$$(1-\lambda) \cdot (-\lambda) - (-2) \cdot (-2) = 0 \quad \text{ja} \quad (2-\lambda) \cdot (1-\lambda) - (-1) \cdot (-1) = 0.$$

Näistä saadaan matriisin A ominaisarvoiksi

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ja matriisin B ominaisarvoiksi

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Eri omaisarvoja vastaavat ominaisvektorit saadaan ratkaisemalla yhtälöt

$$(A - \lambda I) \cdot v = 0.$$

Esimerkiksi matriisin A ominaisarvoa $(1 + \sqrt{17})/2$ vastaava ominaisvektori $v = (v_1, v_2)$ saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{17}}{2} & -2 \\ -2 & -\frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tämä voidaan puolestaan ratkaista Gauss-Jordanin menetelmällä, jolloin ominaisvektorit v on muotoa

$$v = \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \cdot t, t \right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Matriisin A toista ominaisarvoa vastaa ominaisvektorit

$$w = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \cdot t, t \right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

matriisin B ominaisarvoa $(3+\sqrt{5})/2$ vastaa ominaisvektorit

$$u = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot t, t \right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ja ominaisarvoa $(3-\sqrt{5})/2$ vastaa ominaisvektorit

$$s = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot t, t \right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4.* Muodosta funktion $f(x) = \sin(x+x^2)$ toisen asteen Taylorin polynomit pisteissä $x = 0$ ja $x = -1$.

Ratkaisuehdotus: Funktion n:n asteen Taylorin polynomi pisteessä a on

$$p_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Funktion $f(x) = \sin(x+x^2)$ ensimmäinen derivaatta on $f'(x) = \cos(x+x^2)(1+2x)$ ja toinen derivaatta on $f''(x) = -\sin(x+x^2)(1+2x)^2 + 2\cos(x+x^2)$, joten

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \sin(0) + \cos(0)(1+0)(x-0) + \frac{-\sin(0)(1+0)^2 + 2\cos(0)}{2!}(x-0)^2 \\
&= 0 + 1 \cdot x + \frac{2}{2!}x^2 \\
&= x + x^2
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
p_{-1}(x) &= \sin(0) + \cos(-1+(-1)^2)(1+2(-1)(x+1) \\
&\quad + \frac{-\sin(-1+(-1)^2)(1+(-1))^2 + 2\cos(-1+(-1)^2)}{2!}(x+1)^2 \\
&= 0 + 1 \cdot (-1) \cdot (x+1) + \frac{2}{2!}(x+1)^2 \\
&= -(x+1) + (x+1)^2 \\
&= x + x^2.
\end{aligned}$$

6.* Perehdy Martion kirjan esimerkkiin 2.8.9, ja sitä seuraten määritä funktion

$$f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$$

toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $(0,0)$.

Ratkaisuehdotus: Funktion toisen asteen Taylorin kehitelmää varten on laskettava osittaisderivaattojen arvot origossa:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 \\
\partial_1 f(0,0) &= 0 \\
\partial_2 f(0,0) &= 0 \\
\partial_{11} f(0,0) &= 2 \\
\partial_{12} f(0,0) &= 0 \\
\partial_{22} f(0,0) &= -2 \\
\partial_{21} f(0,0) &= 0.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä toisen asteen Taylorin kehitelmän kaavaan (lause 2.8.4):

$$\begin{aligned}\sin(h^2 - k^2) &= \sin(0) + 0 \cdot h + 0 \cdot k + \frac{1}{2}\left(2h^2 + 2 \cdot 0 \cdot hk + (-2)k^2\right) + (h^2 + k^2)^{3/2} B(h, k) \\ &= \frac{1}{2}\left(2h^2 - 2k^2\right) + (h^2 + k^2)^{3/2} B(h, k).\end{aligned}$$