**Vektorianalyysi II**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Syksy 2016**
**Harjoitus 1 - Ratkaisuehdotuksia tähdettömiin tehtäviin**

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa kertaustehtäviä lineaarialgebrasta ja Taylorin polynomeista.

## Tehtäväsarja I

1. Mitä tarkoitetaan symmetrisellä matriisilla? Mitä tiedät symmetrisen matriisin ominaisarvoista ja -vektoreista?

   **Ratkaisuehdotus:** Symmetrinen matriisi on neliämatriisi, joka on samalla itsensä transpoosi eli pätee, että $A = A^t$. Symmetrisen matriisin jokainen itseisarvo on reaalinen ja eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään ortongonaalisia. Tämän lisäksi jokainen (reaalikertoiminen) symmetrinen matriisi voidaan esittää muodossa $U^t \Lambda U$, missä $\Lambda$ on ominaisarvoista koostuva diagonaalimatriisi ja $U$ on ominaisvektoreista koostuva ortogonaalimatriisi (eli matriisi, jonka sarakkeina on ykkösen mittaiset ominaisvektorit).

2.* Määritä seuravien $2 \times 2$ matriisien ominaisarvot ja -vektorit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalisoi edellisen tehtävän matriisit, eli esitä ne muodossa $U^t \Lambda U$, missä $\Lambda$ on diagonaalimatriisi, ja $U$ on ortogonaalimatriisi.

   **Ratkaisuehdotus:** Ainoa, mitä tässä vaiheessa pitää tehdä on etsiä ykkösen mittaisen ominaisvektorit. Valitaan $t = 1$. Tällöin vektorien

$$v' = \frac{v}{\|v\|}, \quad w' = \frac{w}{\|w\|}, \quad u' = \frac{u}{\|u\|} \quad \text{ja} \quad s' = \frac{s}{\|s\|}$$

   pituudet on 1. Tässä esimerkiksi

$$v' = \left( \frac{-1-\sqrt{17}}{4\sqrt{1+\frac{1}{16}(-1-\sqrt{17})^2}}, \frac{1}{4\sqrt{1+\frac{1}{16}(-1-\sqrt{17})^2}} \right).$$

   Tällöin voidaan kirjoittaa

$$A = \begin{pmatrix} v_1' & v_2' \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' & w_1' \\ v_2' & w_2' \end{pmatrix},$$

   kun $v' = (v_1', v_2')$, $w' = (w_1', w_2')$. Samoin

$$B = \begin{pmatrix} u_1' & u_2' \\ s_1' & s_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' & s_1' \\ u_2' & s_2' \end{pmatrix},$$

   kun $u' = (u_1', u_2')$, $s' = (s_1', s_2')$.

**Tehtäväsarja II**

4.* Muodosta funktion $f(x) = \sin(x+x^2)$ toisen asteen Taylorin polynomit pisteissä $x = 0$ ja $x = -1$.

5. Laske funktion $g(x) = e^{x^2}$ viides ja kuudes derivaatta origossa.

   **Ratkaisuehdotus:** Tiedetään, että
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
   joten
$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}.$$
   Tästä saadaan, että
$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} \dots.$$
   Tätä voidaan sitten verrata Taylorin sarjaan pisteessä 0, joka on siis
$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots.$$
   Tästä voidaan sitten suoraan nähdä, että $f^{(5)}(0) = 0$ ja
$$\frac{1}{3!} = \frac{f^{(6)}(0)}{6!} \Rightarrow f^{(6)}(0) = \frac{6!}{3!} = 5! = 120.$$

**Tehtäväsarja III**

6.* Perehdy Martion kirjan esimerkkiin 2.8.9, ja sitä seuraten määritä funktion
$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$$
   toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $(0, 0)$.

7. Tutki edellisen tehtävän funktion käytöstä origossa olevassa kriittisessä pisteessä. Tutki erityisesti, onko origo lokaali ääriarvokohta vai ei.

   **Ratkaisuehdotus:** Funktion arvo origossa on nolla, joten jotta origo olisi lokaali maksimi tai lokaali minimi, tulee funktion arvojen lähellä origoa olla kaikki nollaa suurempia tai kaikki nollaa pienempiä. Nyt kuitenkin nähdään, että valitsemalla $(x, y) = (0, h)$ saadaan
$$\sin(x^2 - y^2) = \sin(-h^2) < 0$$
   ja valitsemalla $(x, y) = (h, 0)$ saadaan
$$\sin(x^2 - y^2) = \sin(h^2) > 0.$$
   Origo ei siis ole lokaali ääriarvokohta.

8. Jatkoa kahdelle edelliselle tehtävälle: muodosta edellisessä tehtävässä esiintyvän funktion $f$ *Hessen matriisi*
$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x, y) & \partial_1\partial_2 f(x, y) \\ \partial_2\partial_1 f(x, y) & \partial_2\partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}$$
   ja määritä sen ominaisarvot origossa.

**Ratkaisuehdotus:** Funktion $\sin(x^2 - y^2)$ Hessen matriisi on

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(x^2-y^2) - 4x^2\sin(x^2-y^2) & 4xy\sin(x^2-y^2) \\ 4xy\sin(x^2-y^2) & -2\cos(x^2-y^2) - 4y^2\sin(x^2-y) \end{pmatrix}.$$

Lasketaan tämän matriisin determinantti pisteessä $(x, y) = (0, 0)$:

$$\det H(0,0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) = -4.$$

Determinantti on pienempi kuin nolla, joten origo ei ole ääriarvokohta vaan satulapiste.

9. (Martio, HT 2.8:2) Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Funktio $u \in C^2(D)$ on *harmoninen* joukossa $D$, jos

$$\partial_1\partial_1 u + \partial_2\partial_2 u = 0$$

$D$:n jokaisessa pisteessä. Näytä, että funktio

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y$$

on harmoninen $\mathbb{R}^2$:ssa. Anna esimerkki funktiosta $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ joka ei ole harmoninen $\mathbb{R}^2$:ssa.

**Ratkaisuehdotus:** Korjataan tehtävänannon funktio siihen muotoon, missä se on Martion kirjassa eli olkoon $f(x, y) = x^3 - 3xy^3$. Nyt

$$\partial_{11} = \partial_1(3x^2 - 3y^2) = 6x$$

ja

$$\partial_{22} = \partial_2(-6xy) = -6x,$$

joten

$$\partial_{11} + \partial_{22} = 0.$$

Esimerkiksi funktio $f(x, y) = x^2 + y^2$ ei ole harmoninen, koska

$$\partial_{11} + \partial_{22} = 2 + 2.$$