

Vektorianalyysi II

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2016

Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 4.11.2016 klo 19.00

Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 18.11.2016 klo 19.00

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa kertaustehtäviä lineaarialgebrasta ja Taylorin polynomeista.

Tehtäväsarja I

Seuraavia tehtäviä varten kertaa lineaarialgebran kurssimateriaalista matriisien ominaisarvot ja -vektorit.

1. Mitä tarkoitetaan symmetrisellä matriisilla? Mitä tiedät symmetrisen matriisin ominaisarvoista ja -vektoreista?

2.* Määritä seuraavien 2×2 matriisien ominaisarvot ja -vektorit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalisoi edellisen tehtävän matriisit, eli esitä ne muodossa $U^t \Lambda U$, missä Λ on diagonaalimatriisi, ja U on ortogonaalimatriisi.

Tehtäväsarja II

Seuraavia tehtäviä varten kertaa analyysien kursseilta Taylorin kehitelmät.

4.* Muodosta funktion $f(x) = \sin(x+x^2)$ toisen asteen Taylorin polynomit pisteissä $x = 0$ ja $x = -1$.

5. Laske funktion $g(x) = e^{x^2}$ viides ja kuudes derivaatta origossa.

Tehtäväsarja III

6.* Perehdy Martion kirjan esimerkkiin 2.8.9, ja sitä seuraten määritä funktion

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$$

toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $(0, 0)$.

7. Tutki edellisen tehtävän funktion käytöstä origossa olevassa kriittisessä pisteessä. Tutki erityisesti, onko origo lokaali ääriarvokohta vai ei.

8. Jatkoa kahdelle edelliselle tehtävälle: muodosta edellisessä tehtävässä esiintyvän funktion f Hessen matriisi

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x, y) & \partial_1 \partial_2 f(x, y) \\ \partial_2 \partial_1 f(x, y) & \partial_2 \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}$$

ja määritä sen ominaisarvot origossa.

9. (Martio, HT 2.8:2) Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Funktio $u \in C^2(D)$ on harmoninen joukossa D , jos

$$\partial_1 \partial_1 u + \partial_2 \partial_2 u = 0$$

D :n jokaisessa pisteessä. Näytä, että funktio

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 y$$

on harmoninen \mathbb{R}^2 :ssa. Anna esimerkki funktiosta $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ joka ei ole harmoninen \mathbb{R}^2 :ssa.