Määr. 2.10.1. Piste $x_0 \in A$ on f:n lokaalimaksimi, jos on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall\, x \in A \cap B(x_0,\delta),\ x \ne x_0$$

Jos pätee '<', kyseessä on aito lokaali maksimi.

Samoin, jos $\exists\, \delta' > 0$ s.e.

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \forall\, x \in A \cap B(x_0,\delta),\ x \ne x_0,$$

x_0 on lokaali minimi. Jos pätee '>', kyseessä on aito lokaali minimi.

Kuinka löytää lokaalit maksimit ja minimit, eli lokaalit ääriarvot? Ensimmäinen testi on seuraava:

Lause 2.10.2. Olkoon $x_0 \in A$ sisäpiste. Jos x_0 on lokaali ääriarvo, ja os. derivaatta $\partial f(x_0)/\partial x_k$ on olemassa, niin

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} = 0.$$

Tod. Olkoon

$$\varphi(t) = f(x_0 + t e_k), \quad |t| < \alpha \leftarrow \text{riitt. pieni}$$

Nyt $\underbrace{\varphi'(0)}_{= 0\ \leftarrow\ \text{analyysi I \& II}} = \partial f(x_0)/\partial x_k$. □

Erityisesti, jos $\nabla f(x_0)$ on olemassa sisäpisteessä x_0, joka on lokaali ääriarvo, niin $\nabla f(x_0) = 0$!

[Piste jossa $\nabla f(x_0) = 0$ on f:n kriittinen piste]

Nyt pätee: Ol. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, f diffva. f:n lokaalit ääriarvot ovat f:n kriittisiä pisteitä.

Kaikki kriittiset pisteet eivät kuitenkaan ole lokaaleja ääriarvoja.

Esim. i) $(n=1)$ $f(t) = t^3$; $f'(t) = 3t^2 = 0 \iff t = 0$.

Nyt jok. 0:n ympäristössä on luvut t_1, t_2 s.e.

$$f(t_1) < 0 < f(t_2) \quad (\text{ol. } t_1 < 0,\ t_2 > 0)$$

Siis 0 ei ole lokaali maksimi eikä minimi.

ii) $(n=2)$

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$\nabla f(x_1,x_2) = (2x_1, -2x_2) = 0 \iff (x_1,x_2) = 0.$$

Siis origo on ainoa kriittinen piste. Nyt

$$f(x_1,0) = x_1^2 > 0 \quad \text{aina kun } x_1 \neq 0$$
$$f(0,x_2) = -x_2^2 < 0 \quad \text{-"-} \quad x_2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ origo ei ole lokaali ääriarvo.

Tutkitaan nyt funktion f käytöstä kriittisen pisteen lähellä, ja ol. että $f \in C^3(U)$, U x_0:n ymp. Ol. $n = 2$. aluksi:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}\left(\partial_{11} f(x_0)h_1^2 + 2\partial_{12} f(x_0)h_1h_2 + \partial_{22} f(x_0)h_2^2\right) + \|h\|^3 R(h)$$

Landau-merk.

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}\left(a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2\right) + O(\|h\|^3)$$

Jos $\|h\|$ on riittävän pieni lausekkeen $(h = (h_1,h_2))$

$$q(h,h) := a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_{2}^2$$

merkki (ja käytös) määrää kaiken. q on ns. neliömuoto, ja se voidaan kirjoittaa

muodossa

$$q(h,h) = \langle Ah, h\rangle, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}$$ symmet. niin sanottu matriisi

$$\Big[\ \langle Ah,h\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 \\ a_{12}h_1 + a_{22}h_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$= a_{11}h_1^2 + a_{12}h_2h_1 + a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2$$

$$= a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2.$$

Kuinka neliömuodon käytöstä voi ymmärtää? Palautetaan mieliin Lin. alg II:n kurssilta:

Jos A on symm. $\mathbb{R}$-kert. matriisi, niin

$$A = U^t \Lambda U, \quad U \text{ ortog. matriisi eli } U^{-1} = U^t$$

"peilaus + koord. kierto"

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}, \quad \lambda_i \text{ om. arvot.}$$

Nyt

$$q(h,h) = \langle Ah, h\rangle = \langle U^t \Lambda U h, h\rangle = \langle \Lambda U h, U h\rangle$$
$$= \langle \Lambda h', h'\rangle \quad , h' = Uh \in \mathbb{R}^n .$$

Siis

$$q(h,h) = \langle \Lambda h', h'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i'^2 , \quad h_i' \in \mathbb{R} .$$

Jos haluamme tietää $q(h,h)$:n merkin, riittää siis tutkia $\sum \lambda_i h_i'^2$:n merkkiä, ja tämä määräytyy ominaisarvoista $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1) Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, on $q(h,h)$ pos. definiitti eli

$$q(h,h) > 0 , \quad h \neq 0 .$$

2) Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ on $q(h,h)$ pos. semidefiniitti, eli

$$q(h,h) \geq 0 , \quad h \neq 0$$

3) Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$, on $q(h,h)$ neg. def. eli

$$q(h,h) < 0 \quad \forall h \neq 0$$

4) Jos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$ on $q(h,h)$ neg. semidefiniitti, eli

$$q(h,h) \leq 0 \quad \forall h \neq 0 .$$

Ja viimeinen tapaus, jos $\exists \lambda_r, \lambda_s$ s.e.

$$\lambda_r < 0 < \lambda_s ,$$

niin $q(h,h)$ on indefiniitti.

Esim. i)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

Om. arvot:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 9$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 9 = \lambda^2 - 3\lambda - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+28}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2} \quad \therefore \quad \begin{matrix} 3 + \sqrt{37} > 0 \\ 3 - \sqrt{37} < 0 \end{matrix}$$

$\therefore$ Neliömuoto

$$\langle Ah, h\rangle = 2h_1^2 + 6h_1h_2 + h_2^2$$

on indefiniitti

ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1$$

$$= \lambda(\lambda - 2) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ tai } \lambda = 2.$$

Siis neliömuoto

$$\langle Ah, h \rangle = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$$

on pos. semidefiniitti. Tämän olisi tietenkin nähnyt myös seuraavasti:

$$\langle Ah, h \rangle = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 = (h_1 + h_2)^2 \geq 0,$$

ja $\langle Ah, h \rangle = 0$ kun $h_1 = -h_2$.

iii) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 - 1$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0 \iff$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

$\therefore$ A on pos. definiitti.

iv) Normin neliö $h_1^2 + \dots + h_n^2 = \langle I_{n \times n} h, h \rangle$ on tietenkin pos. definiitti neliömuoto, ja ns. Lorentz-muoto

$$h_1^2 + \dots + h_n^2 - h_{n+1}^2$$

on esimerkki indefiniitistä neliömuodosta.

Nyt liittyen neliömuodon

$$\langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle := \sum_{k,l=1}^{n} \partial_{kl} f(x) h_k h_l$$

käsitteeseen kohtien 1)–4) mukaan voimme sanoa f:stä kriittisessä pisteessä x (eli $\nabla f(x) = 0$) seuraavaa.

1) Jos $\nabla^2 f(x)$ on pos. definiitti, on x aito lokaali maksimi

2) -"- $\nabla^2 f(x)$ on neg. definiitti, on x aito lokaali minimi.

3) Jos $\nabla^2 f(x)$ on joko ~~indefiniitti tai~~ semi-definiitti, ei $\nabla^2 f$:ään tarkastelemalla voi sanoa enempää käytöksestä kriittisessä pisteessä. Jos indef; ei ole ääriarvo.

Tutkitaan nyt esimerkkejä:

Esim: i) $f(x_1,x_2) = 2x_1^3 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$, $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Nyt

$$\nabla f(x_1,x_2) = (6x_1^2 - 6x_2,\ 6x_2 - 6x_1) = 6(x_1^2 - x_2,\ x_2 - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_1^2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1^2 - x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = 0 \text{ tai } x_1 = 1 \end{cases}$$

Siis f:n kriittiset pisteet ovat

$p_1 = (0,0)$ ja $p_2 = (1,1)$.

Lasketaan:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f & \partial_{12} f \\ \partial_{12} f & \partial_{22} f \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siis p_1:ssä:

$$\nabla^2 f(0,0) = 6\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

ja tämän ominaisarvot ovat

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -6 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 156}}{2}$$; tästä nähdään että om.arvot ovat erimerkkisiä, ja siis

$\nabla^2 f(0,0)$ on indefiniitti neliömuoto $\leadsto$ ei lok. ääriarvo.

Taas p_2:ssa:

$$\nabla^2 f(1,1) = 6\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

ja ominaisarvot ovat

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & -6 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda + 72 - 36 = \lambda^2 - 18\lambda + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 144}}{2} > 0$$

$\therefore$ Molemmat om. arvot $> 0 \leadsto$ kyseessä on lokaali minimi.

Kun $n = 2$, voi tämän nähdä suoraankin laskematta ominaisarvoja:

Nyt matriisin $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ ominaisarvoille λ_1, λ_2 pätee

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \operatorname{tr}(A) & \text{"matriisin A jälki/trace"} \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det A \end{cases}$$

Siis, jos

a) $\lambda_1 \lambda_2 = \det A > 0$ niin ominaisarvot ovat saman-merkkisiä, ja A on joko pos. tai negat. definiitti.
& $\neq 0$

- Jos $a_{11} > 0$, $\det A > 0 \Rightarrow A$ pos. def.
- Jos $a_{11} < 0$, $\det A < 0 \Rightarrow A$ neg. def.

b) Jos $\lambda_1 \lambda_2 = \det A = 0$, niin joko $\lambda_1 = 0$ tai $\lambda_2 = 0$,

- Jos $\det A = 0$, on A semi-definiitti.

c) Jos $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, niin λ_1 ja λ_2 ovat eri merkkisiä,

- Jos $\det A < 0$, niin A on indefiniitti.

Soveltamalla tätä Hessen matriisiin $\nabla^2 f$ saamme seuraavat ehdot f:n käyttäytymiselle kriittisen pisteen

x_0 ympäristössä (nyt $n = 2$!)

1) Jos $\det \nabla^2 f(x_0) > 0$, $\partial_{11} f(x_0) > 0$ on Hessen matriisin määräämä neliömuoto pos. definiitti, ja kriittinen piste x_0 on aito lokaali minimi.

2) Jos $\det \nabla^2 f(x_0) > 0$, $\partial_{11} f(x_0) < 0$ on Hessen matriisin määräämä neliömuoto neg. definiitti ja kriittinen piste x_0 on aito lokaali maksimi.

3) Jos $\det \nabla^2 f(x_0) = 0$, niin Hessen neliömuoto on semi-definiitti pist. x_0, ja ääriarvo käytöksestä ei voi sanoa mitään.

4) Jos $\det \nabla^2 f(x_0) < 0$, niin kriittinen piste x_0 on satulapiste, ja se ei ole lokaali ääriarvo.

<u>Esim.</u> i) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$.

$$\nabla f = (2x_1 + 4x_2,\ 4x_1 + 4x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x_1 = x_2 = 0}. \leftarrow \text{ainoa kriittinen piste.}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det \nabla^2 f(0,0) = 8 - 16 = -8 < 0$ ∴ origo ei ole lokaali ääriarvo.

ii) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^4$

$$\nabla f = (2x_1 + 4x_2,\ 4x_1 + 4x_2^3)$$

$$\therefore \nabla f = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$\therefore\ x_2^3 - 2x_2 = 0$ ja $x_1 = -2x_2$

$\iff x_2(x_2^2 - 2) = 0$ ja $x_1 = -2x_2$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_2 = 0,\ x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{2},\ x_1 = -2\sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_1 = 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$$ Kriittiset pisteet

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

(0,0):

$$\det \nabla^2 f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

indef $\Rightarrow$ ei ääriarvo.

$(\mp 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$:

$$\det \nabla^2 f(\mp 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12\cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$= 48 - 16 = 32 > 0.$$

Koska $\partial_{11} f = 2 > 0$ niin pisteissä $(\mp 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ on lokaalit minimit.

Katsotaan vielä seuraavia esimerkkejä:

Esim. a) $f(x_1,x_2) = e^{\|x\|^2} - x_1x_2$.

Kriittiset pisteet:

$$\nabla f(x_1,x_2) = 2x e^{\|x\|^2} - (x_2, x_1)$$
$$= (2x_1 e^{\|x\|^2} - x_2,\ 2x_2 e^{\|x\|^2} - x_1).$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 e^{\|x\|^2} - x_2 = 0 \\ 2x_2 e^{\|x\|^2} - x_1 = 0 \end{cases}$$

Siis $x_2 = 2x_1 e^{\|x\|^2}$ ja sij. tämä alempaan yht. jolloin

$$4x_1 e^{2\|x\|^2} - x_1 = 0 \iff x_1(4e^{2\|x\|^2} - 1) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2\|x\|^2 = \ln 1/4 < 0 \text{ ↯} \end{cases}$$

Siis $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ ∴ Ainoa kriittinen piste on origo.

Hessian origossa: $\partial_{11} f(x_1, x_2) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_1^2 e^{\|x\|^2}$
$= 2e^{\|x\|^2}(1 + 2x_1^2)$

$\partial_{12} f(x_1, x_2) = -1$,

$\partial_{22} f(x_1, x_2) = 2e^{\|x\|^2}(1 + 2x_2^2)$.

Siis

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2e^{\|x\|^2}(1+2x_1^2) & -1 \\ -1 & 2e^{\|x\|^2}(1+2x_2^2) \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

Nyt

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$, siis neliömuoto on pos. def.

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \quad \Rightarrow$$ origossa on lokaali minimi.

ii) $g(x_1, x_2, x_3) = e^{\|x\|^2} - x_2 x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Lasketaan ensin gradientti:

$\partial_1 g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 e^{\|x\|^2}$

$\partial_2 g(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 e^{\|x\|^2} - x_3$

$\partial_3 g(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 e^{\|x\|^2} - x_2$

$$\therefore \nabla g = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 e^{\|x\|^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{x_1 = 0} \\ x_3 = 2x_2 e^{\|x\|^2} \\ x_2 = 2x_3 e^{\|x\|^2} \end{cases}$$

kuten ed. esim. $\Rightarrow x_2 = x_3 = 0$.

Eli ainoa kriittinen piste on edelleen origo.

Sitten toiset derivaatat:

$\partial_{11} g(x) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_1^2 e^{\|x\|^2} = 2e^{\|x\|^2}(1 + 2x_1^2)$

$\partial_{12} g(x) = 4x_1 x_2 e^{\|x\|^2}$, $\partial_{13} g(x) = 4x_1 x_3 e^{\|x\|^2}$

$\partial_{22} g(x) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_2^2 e^{\|x\|^2}$, $\partial_{23} g(x) = 4x_2 x_3 e^{\|x\|^2} - 1$

$\partial_{33} g(x) = 2e^{\|x\|^2} + 4x_3^3 e^{\|x\|^2}$.

Siis

$$\nabla^2 g(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lasketaan om. arvot:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right)$$

$= 0 \iff \lambda = 2$ tai $(2-\lambda) = \pm 1 \iff \lambda = 2$ tai $\lambda = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$\therefore$ Om. arvot ovat $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Siis

$\nabla^2 g(0)$ on pos.definiitti $\to$ origo on lokaali minimi.

2.11. Globaalit ääriarvot.

On hyödyllistä osata määrittää funktion lokaalit ääriarvot, mutta useimmiten sovelluksissa haluamme määrittää funktion absoluuttisen maksimin ja minimin. Tämä on hankalempaa.

Määr. 2.11.1. Olk. $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$.

Piste $x_M \in A$ on f:n globaali maksimi joukossa A, jos

$$f(x) \leq f(x_M) \quad \forall \ x \in A.$$

Piste $x_m \in A$ on f:n globaali minimi joukossa A, jos

$$f(x) \geq f(x_m) \quad \forall x \in A.$$

Huom. Globaalia maksimia tai minimiä ei aina ole olemassa.

Esim. $A = (0, \infty)$ $(= \mathbb{R}_+)$, $f(x) = 1/x$.
tai $A = (0,1]$

Nyt $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0+} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ $\quad f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ f:llä ei ole globaalia maksimia tai minimiä joukossa $\mathbb{R}_+$.

Jos globaali maksimi tai minimi on, se ei aina ole yksikäsitteinen:

Esim. $A = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.