3. Vektoriarvoiset funktiot

3.1. Polut

Olkoon Δ mikä tahansa väli reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Tällöin kuvaus $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ on *polku*, jos se on jatkuva. Tutkimme seuraavassa tapausta, jossa $\Delta = [a, b]$ on suljettu väli. Jokaisella $t \in [a, b]$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

on $\mathbb{R}^n$:n vektori ja siten γ määrittelee kuvaukset $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Näitä kutsutaan γ:n *koordinaattifunktioiksi*. Kuvauksen γ jatkuvuus tarkoittaa, että jokainen γ_i on jatkuva.

3.1.1. Määritelmä. Sanomme, että $\gamma \in C^1([a, b])$ eli γ on C^1-funktio, jos $\gamma_i \in C^1([a, b])$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Kuvauksen γ derivaatta γ' pisteessä $t \in [a, b]$ määritellään kaavalla

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t + h) - \gamma(t)}{h}.$$

Päätepisteissä a ja b käytetään luonnollisesti toispuoleisia derivaattoja.

Derivaatta $\gamma'(t)$ on siis myös $\mathbb{R}^n$:n vektori. Yllä määritelty derivaatta ei ole uusi käsite. Se vastaa tapausta $n = 1$ kappaleessa 2.6. Ainoa ero on, että määrittelyjoukko on suljettu väli $[a, b]$, jolloin (toispuoleista) derivoituvuutta on hyödyllistä tutkia myös välin päätepisteissä. Itse asiassa derivaatta on lineaarikuvaus $\gamma'(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, joka määritellään kaavalla

$$\gamma'(t)h = (h\gamma_1'(t), \ldots, h\gamma_n'(t)) = h\gamma'(t), \ h \in \mathbb{R},$$

vertaa 2.6. Tämä lineaarikuvaus voidaan samaistaa vektorin $\gamma'(t)$ kanssa.

Fysikaalinen tulkinta polulle $\gamma'(t)$ on "kulkijan" γ nopeus hetkellä t ja $|\gamma'(t)| = (\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_n'(t)^2)^{1/2}$ on kulkijan vauhti hetkellä t.

Jos $\gamma'(t) \neq 0$, niin $\gamma'(t)$ antaa polun tangentin (suunnan) parametrin arvolla t. Jos $\gamma'(t) \neq 0$, niin tangenttia edustaa suora

$$\lambda \mapsto \gamma(t) + \lambda\gamma'(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Tämä on luonnollisesti myös polku, jonka määrittelyväli on koko $\mathbb{R}$.

Jos γ' on jatkuva, niin se määrittelee uuden polun $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Jos $\gamma \in C^2([a,b])$, niin voidaan määritellä $\gamma'' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$,

$$\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \ldots, \gamma_n''(t)).$$

Fysikaalinen tulkinta polulle $\gamma''(t)$ on "kulkijan" γ kiihtyvyys hetkellä t.

3.1.2. Esimerkki. Olkoon $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, missä $a, b > 0$. Tällöin

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$$

ja

$$\gamma''(t) = (-a\cos t, -b\sin t) = -\gamma(t).$$

Toinen derivaatta $\gamma''(t)$ on siis vastakkaissuuntainen vektoriin $\gamma(t)$ nähden. Kun t käy läpi välin $[0,2\pi]$, niin $\gamma(t)$ kiertää kerran ympäri pitkin ellipsiä $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Jos $\gamma \in C^1([a,b])$, niin polun γ pituuden $l(\gamma)$ antaa kaava

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_n'(t)^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t.$$

Polun pituutta, lähinnä tapauksessa $n = 2$, on yleensä käsitelty yhden muuttujan funktioiden teorian yhteydessä.

3.1.3. Esimerkki. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin f on luonnollisesti myös polku, mutta f määrittelee myös polun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ kaavalla

$$\gamma(t) = (t, f(t)).$$

Havaitaan, että

$$\gamma([a,b]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in [a,b]\},$$

eli välin $[a,b]$ kuva kuvauksessa γ on funktion f graafi. Jos f:llä on derivaatta $f'(t)$, niin

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0).$$

Polun γ tangenttia pisteessä $t \in [a,b]$ edustaa suora

$$\lambda \overset{T}{\mapsto} \gamma(t) + \lambda\gamma'(t) = (t, f'(t)) + \lambda(1, f'(t)) = (t+\lambda, f(t) + \lambda f'(t)),$$

missä $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Suoran pisteet $(x,y) \in T(\mathbb{R})$ toteuttavat yhtälön (saadaan eliminoimalla λ)

$$y = f(t) + f'(t)(x-t).$$

Tämä on luonnollisesti f:n tangentin yhtälö pisteessä t.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

3.1:1 Olkoon $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Osoita, että $\gamma(t)$ ja $\gamma'(t)$ ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden ja että $\gamma''(t)$ on vastakkaissuuntainen vektoriin $\gamma(t)$ nähden.

3.1:2 Olkoon $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ partikkelin "polku". Oletetaan, että $\gamma(0) = (0,0,0)$ ja $\gamma'(0) = (1,1,0)$ sekä $\gamma''(t) = (0,0,-1)$ kaikilla $t \geq 0$. Määritä γ. Millä "hetkellä" $t > 0$ partikkeli siirtyy xy-tason alapuolelle ja missä xy-tason pisteessä tämä tapahtuu?

3.2. Pinnat

Tarkastellaan "2-ulotteista" *pintaa* $\mathbb{R}^3$:ssa. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ ja $r : D \to \mathbb{R}^3$,

$$r(x,y) = (r_1(x,y), r_2(x,y), r_3(x,y)).$$

Oletamme, että D on avoin, vaikka tämä ei välttämättä päde sovelluksissa; D voi olla esimerkiksi myös suljettu neliö. Kiinnitetään y_0 ja tarkastellaan kuvausta

$$x \overset{\gamma_1}{\mapsto} r(x, y_0).$$

Tämä määrää polun x_0:n sisältävällä välillä, kun piste $(x_0, y_0) \in D$. Tämä polku kulkee "pinnalla" $r(D)$. Vastaava pätee polulle

$$y \overset{\gamma_2}{\mapsto} r(x_0, y).$$

Oletamme, että $r \in C^1(D)$, toisin sanoen $r_i \in C^1(D)$, $i = 1,2,3$. Tällöin on olemassa derivaatat

$$\partial_1 r(x,y) = (\partial_1 r_1(x,y), \partial_1 r_2(x,y), \partial_1 r_3(x,y)) = \gamma_1'(x),$$

$$\partial_2 r(x,y) = (\partial_2 r_1(x,y), \partial_2 r_2(x,y), \partial_2 r_3(x,y)) = \gamma_2'(y),$$

missä pisteen (x_0, y_0) asemasta on käytetty merkintää (x,y) polkujen γ_1 ja γ_2 määritelmissä. Jos vektorit $\partial_1 r(x,y)$ ja $\partial_2 r(x,y)$ eivät ole yhdensuuntaiset eivätkä nollavektoreita, niin ne virittävät tason, joka kulkee pisteen $r(x,y)$ kautta. Tätä kutsutaan pinnan r *tangenttitasoksi* pisteessä $r(x,y) \in r(D)$. Koska $\partial_1 r(x,y) \nparallel \partial_2 r(x,y)$, niin $\partial_1 r(x,y) \times \partial_2 r(x,y) \neq 0$ ja $\partial_1 r(x,y) \times \partial_2 r(x,y)$ on vektori, joka on kohtisuorassa tangenttitasoa vastaan, toisin sanoen *normaalivektori*. Olemme yllä käyttäneet tavallista $\mathbb{R}^3$:n vektoreiden ristituloa. Tangenttitaso koostuu siis niistä vektoreista $\overline{x}$, joilla

$$(\overline{x} - r(x,y)) \cdot (\partial_1 r(x,y) \times \partial_2 r(x,y)) = 0.$$

3.2.1. Esimerkki. Tarkastellaan R-säteistä origokeskistä pallopintaa $\mathbb{R}^3$:ssa, $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r = (r_1, r_2, r_3) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta),$$

missä olemme käyttäneet pallopinnan pisteille pallokoordinaatistoesitystä (φ, θ). Kulma θ on laskettu positiivisesta x_3-akselista ja φ on napakulma x_1x_2-tasossa. Pallopinnalla on se ominaisuus, että $r = r(\varphi, \theta)$ on yhdensuuntainen normaalivektorin kanssa. Tämän todentamiseksi lasketaan

$$\partial_1 r(\varphi,\theta) = R(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0),$$

$$\partial_2 r(\varphi,\theta) = R(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta).$$

Näistä saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
\partial_1 r \times \partial_2 r &= R^2 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= R^2(-\sin^2\theta\cos\varphi, -\sin^2\theta\sin\varphi, \\
&\qquad -\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi) \\
&= R^2(-\sin\theta)(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \\
&= R(-\sin\theta) r(\varphi,\theta),
\end{aligned}$$

eli ristitulo $\partial_1 r \times \partial_2 r$ on $r(\varphi,\theta)$:n suuntainen. Huomaa, että tällä pallopinnan esitystavalla $\partial_1 r \times \partial_2 r = 0$ pohjois- ja etelänavalla ($\theta = 0$ ja $\theta = \pi$).

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

3.2:1 Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Jatkuvan funktion $f : D \to \mathbb{R}$ graafi voidaan esittää pintana $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Jos $f \in C^1(D)$, niin määritä tämän pinnan tangenttitason normaali pisteessä $r(x, y)$. Sovella tätä tapaukseen $f(x, y) = xy + x$ pisteessä $(0, 0)$. Mikä on tangenttitason yhtälö tässä tapauksessa?

3.3. KÄÄNTEISKUVAUSLAUSE

Käänteiskuvausten tutkiminen tapauksessa $n = 1$ on varsin yksinkertaista. Jos $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f \in C^1((a, b))$ ja $f'(x) \neq 0$ jokaisella $x \in (a, b)$, niin f määrittelee bijektion $(a, b) \to f((a, b)) = \Delta$ ja on olemassa $g = f^{-1} \in C^1(\Delta)$. Tämä on käänteiskuvauslause tapauksessa $n = 1$. Sen todistus perustuu siihen, että f':n jatkuvuudesta ja ehdosta $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$ seuraa, että f on aidosti monotoninen.

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Pyrimme löytämään ehtoja kuvauksen $f : D \to \mathbb{R}^n$ *lokaalille kääntyvyydelle*. Kuvauksen f toteaminen bijektioksi koko D:ssä on hankalampaa, kun $n \geq 2$. Huomaa, että lähtö- ja maalijoukon dimensio on sama. Vaikeuksia tapauksessa $n \geq 2$ tuottaa se, että $\mathbb{R}^n$:ssä ei ole yksinkertaista vastinetta aidosti monotoniselle kuvaukselle.

Tarkastellaan ensin alkeellista tapausta. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarinen. Merkitään $f = A$ ja olkoon

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{esitysmatriisi}}.$$

Käytämme hyväksi lineaarialgebran tietoja: Kuvauksella A on käänteiskuvaus $A^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (joka myös on lineaarinen) täsmälleen silloin, kun $\det A \neq 0$, missä

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kannattaa pitää mielessä, että $\det A = 1/\det(A^{-1})$.

Olkoon nyt $f : D \to \mathbb{R}^n$ ja $x_0 \in D$. Jos f on derivoituva pisteessä x_0, niin kuvaus $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$x \overset{L}{\mapsto} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

approksimoi f:ää pisteen x_0 pienessä ympäristössä. Kuvaus $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarinen. Jos tällä kuvauksella on käänteiskuvaus eli jos $\det(f'(x_0)) \neq 0$, niin kuvauksella L on käänteiskuvaus $L^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jonka antaa kaava

$$L^{-1}(y) = x_0 + f'(x_0)^{-1}(y - f(x_0)).$$

Tämän todistaminen on suoraviivaista. Jos $x \in \mathbb{R}^n$, niin

$$\begin{aligned}(L^{-1} \circ L)(x) &= x_0 + f'(x_0)^{-1}(L(x) - f(x_0)) \\ &= x_0 + f'(x_0)^{-1} f'(x_0)(x - x_0) \\ &= x_0 + x - x_0 = x.\end{aligned}$$

Vastaavasti nähdään, että $(L \circ L^{-1})(y) = y$ jokaisella $y \in \mathbb{R}^n$, joten L^{-1} on L:n käänteiskuvaus. Jos kuvausta f approksimoiva kuvaus L on käännettävissä, niin vaikuttaa mahdolliselta, että myös kuvauksella f on käänteiskuvaus ainakin pisteen x_0 ympäristössä. Tämä pitääkin paikkansa sopivilla säännöllisyysoletuksilla ja seuraava lause antaa riittävän ehdon kuvauksen f lokaalille kääntyvyydelle. Sivuutamme todistuksen; se pitää sisällään lukuisia yksityiskohtia.

3.3.1. Lause (käänteiskuvauslause). *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : D \to \mathbb{R}^n$ C^1-kuvaus ja $\det(f'(x)) \neq 0$ kaikilla $x \in D$. Tällöin jokaisella $x \in D$ on olemassa sellainen $r > 0$, että kuvauksen f rajoittuma $f|B(x,r)$ pallossa $B(x,r)$ on injektio ja f määrittelee bijektion*

$$B(x,r) \to f(B(x,r)).$$

Lisäksi $f(B(x,r))$ on avoin, $f^{-1} : f(B(x,r)) \to B(x,r)$ on C^1-kuvaus sekä

$$f^{-1\prime}(f(y)) = f'(y)^{-1} \tag{3.3.2}$$

jokaisella $y \in B(x,r)$. □

Determinanttia $\det(f'(x))$ sanotaan f:n *Jacobin determinantiksi* eli *jacobiaaniksi* pisteessä x ja merkitään

$$\det f'(x) = \tau(x,f).$$

Huomaa kaavan (3.3.2) merkitys: Lineaarikuvauksen $f^{-1\prime}(f(y))$ esitysmatriisi saadaan lineaarikuvauksen $f'(y)$ esitysmatriisin käänteismatriisina.

Kannattaa muistaa, että $\mathbb{R}^n$:ssä, $n \geq 2$, ei ole olemassa yksinkertaista tulosta, joka takaisi, että kuvaus $f : D \to \mathbb{R}^n$ on injektio. Siitä, että f on injektio jossakin pallossa $B(x,r_x) \subset D$ jokaisella $x \in D$ ei seuraa, että f olisi injektio koko D:ssä.

3.3.3. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Selvästi $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja f:n derivaatalla $f'(x,y)$ on pisteessä $(x,y) \in D$

esitysmatriisi

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$\tau((x,y),f) = \det f'(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2 \neq 0,$$

kun $(x,y) \neq (0,0)$.

Lauseesta 3.3.1 seuraa, että jokaisella $(x,y) \neq (0,0)$ on olemassa ympäristö $U = B((x,y),r)$, johon rajoitettuna f on injektio, $f : U \to f(U)$ on bijektio sekä $f^{-1} : f(U) \to U$ on $C^1(f(U))$-kuvaus.

Toisaalta havaitaan, että $f(-x,-y) = (x^2 - y^2, 2xy) = f(x,y)$, eli f ei ole injektio missään $(0,0)$:n ympäristössä. Erityisesti f ei ole injektio joukossa $R^2 \setminus \{(0,0)\}$, vaikka $\tau \neq 0$ tässä joukossa.

Edellä oleva kuvaus f on kuvaus $z \mapsto z^2$, jos taso $\mathbb{R}^2$ tulkitaan kompleksitasoksi $(x,y) = x + iy = z$.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

3.3:1 Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x, xy, z^2)$, Jacobin determinantti pisteessä (x,y,z). Missä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteissä se on 0?

3.3:2 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1-bijektio. Onko $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1-kuvaus?

3.4. Lagrangen kertoimet

Usean muuttujan reaaliarvoisen funktion f maksimi- ja minimipisteitä tarkastellaan usein f:n määrittelyjoukkoa pienemmässä joukossa $A_0 \subset \mathbb{R}^n$, toisin sanoen tutkitaan funktiota $f|A_0$ eli funktion f *rajoittumaa* joukkoon A_0. Tavallisesti kyseeseen tulee "käyrä" γ tai "pinta" S joukkona A_0. Tarkastelemme tilannetta, kun $n = 2$ ja joukon A_0 antaa polku γ. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli, $A \subset \mathbb{R}^2$ joukko, $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^2$ polku ja $f : A \to \mathbb{R}$ kuvaus. Oletetaan lisäksi, että $A_0 = \gamma(\Delta) \subset A$.

Tehtävänä on määrätä yhdistetyn funktion $f \circ \gamma : \Delta \to \mathbb{R}$ ääriarvokohdat. Olkoon $t \in \Delta$ ja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Tällöin

$$(f \circ \gamma)(t) = f(x(t), y(t)).$$

Tehtävä on periaatteessa helppo. Jos f on C^1-kuvaus ja γ derivoituva, niin ääriarvokohdat löytyvät Δ:n mahdollisista päätepisteistä tai pisteistä, joissa

$$(f \circ \gamma)'(t) = 0.$$

Lauseessa 2.6.6 todettiin, että

$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \partial_1 f(\gamma(t))\, x'(t) + \partial_2 f(\gamma(t))\, y'(t) = 0,$$

joten pitäisi vain löytää tämän yhtälön ratkaisut. Valitettavasti tilannetta ei ole yleensä annettu tässä muodossa.

Polku annetaan yleensä tasa-arvojoukkona $g(x, y) = 0$, missä $D \subset \mathbb{R}^2$ on avoin ja $g : D \to \mathbb{R}$. Tutkimme seuraavaksi tilannetta, jossa $f : D \to \mathbb{R}$ ja $g : D \to \mathbb{R}$ ovat $C^1(D)$-funktioita ja halutaan määrätä f:n ääriarvokohdat joukossa

$$A_0 = \{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\}.$$

Oletetaan, että $(x_0, y_0) \in A_0$ ja $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Tällöin funktiolla $f|A_0$ ei voi olla ääriarvokohtaa pisteessä (x_0, y_0), jos $\nabla f(x_0, y_0)$ ja $\nabla g(x_0, y_0)$ eivät ole yhdensuuntaisia. Toisin sanoen jos (x_0, y_0) on $f|A_0$:n ääriarvokohta, niin

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \tag{3.4.1}$$

jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$. Huomaa, että arvo $\lambda = 0$ on sallittu.

Tämän todistaminen on vaivalloista, mutta geometrinen idea tuloksen takana on varsin selvä. Pitää siis näyttää, että jos (3.4.1) ei ole voimassa, niin $f|A_0$:lla ei ole ääriarvokohtaa pisteessä (x_0, y_0). Jos (3.4.1) ei ole voimassa, niin $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ (jos $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, voidaan valita $\lambda = 0$). Toisaalta $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, jolloin voidaan käyttää *implisiittifunktiolausetta*, jonka mukaan joukko A_0 voidaan esittää pisteen (x_0, y_0) eräässä ympäristössä funktion $y = y(x)$ (jos $\partial_2 g(x_0, y_0) \neq 0$) tai funktion $x = x(y)$ (jos $\partial_1 g(x_0, y_0) \neq 0$) graafina eli joka tapauksessa C^1-polkuna $\gamma : [a, b] \to A_0$, missä $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $t_0 \in (a, b)$ ja $\gamma'(t_0) \neq 0$. Nyt $\gamma'(t_0) \cdot \nabla g(x_0, y_0) = 0$, katso lause 2.7.5, joten vektorit $\gamma'(t_0)$ ja $\nabla g(x_0, y_0)$ muodostavat tason kannan pisteessä (x_0, y_0). Suora

$$t \mapsto (x_0, y_0) + t \nabla g(x_0, y_0)$$

jakaa tason kahteen osaan T_1 ja T_2, ja koska $\nabla f(x_0, y_0)$ ei ole yhdensuuntainen vektorin $\nabla g(x_0, y_0)$ kanssa, se osoittaa toiseen, sanokaamme T_1:een, näistä osista. Nyt funktio f kasvaa voimakkaimmin suuntaan $\nabla f(x_0, y_0)$ pisteestä (x_0, y_0) katsoen, ja koska A_0 "melkein" yhtyy vektorin $\gamma'(t_0)$ antamaan suoraan

$$t \mapsto (x_0, y_0) + t\gamma'(t_0)$$

lähellä pistettä (x_0, y_0), niin $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, missä $(x, y) \in T_1 \cap A_0$ ja (x, y) on lähellä pistettä (x_0, y_0). Vastaavasti $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, kun $(x, y) \in T_2 \cap A_0$ ja (x, y) on riittävän lähellä pistettä (x_0, y_0). Siten funktiolla $f|A_0$ ei voi olla ääriarvokohtaa pisteessä (x_0, y_0). Kun yllä oleva päättely tehdään täsmällisesti, saadaan seuraava lause:

3.4.2. Lause. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $f, g : D \to \mathbb{R}$ $C^1(D)$-funktioita ja*

$$A_0 = \{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\}.$$

Jos funktiolla $f|A_0$ on lokaali ääriarvokohta pisteessä $(x_0, y_0) \in A_0$ ja

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq 0,$$

niin

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällaisia lukuja λ sanotaan funktion f Lagrangen kertoimiksi. □

3.4.3. Esimerkki. Yksikköympyrään on piirretty tasakylkinen kolmio, jonka kanta on x-akselin suuntainen. Määrätään kolmion suurin mahdollinen pinta-ala. Merkitään kannan puolikasta x:llä ja olkoon piste, jossa kanta leikkaa y-akselin piste $(0, y)$. Tällöin kolmion ala $f(x, y)$ on

$$f(x, y) = \frac{1}{2} 2x(1 - y) = x(1 - y),$$

missä $x \geq 0$. Piste (x, y) toteuttaa lisäksi ehdon $x^2 + y^2 = 1$.

On määrättävä f:n maksimiarvo joukossa

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Määritellään $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, jolloin

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0,\ x > 0\}.$$

Nyt voidaan käyttää lausetta 3.4.2. Joukoksi D voidaan ottaa avoin joukko

$$D = \{(x, y) : x > 0\}$$

eli avoin oikea puolitaso. Funktiot f ja g ovat selvästi $C^1(D)$-funktioita. Siis jos f:llä on lokaali ääriarvo A_0:n pisteessä (x, y), niin joko

$$(1 - y, -x) = \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

tai $\nabla g(x, y) = 0$. Jälkimmäinen ehto ei tule kyseeseen joukossa D eikä siis joukossa A_0. Edellisestä yhtälöstä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (1 - y, -x) = \lambda(2x, 2y) = (\lambda 2x, \lambda 2y), \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} 1 - y = \lambda 2x \\ -x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\lambda = \frac{1 - y}{2x},$$

ja sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön jää ratkaistavaksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

jonka ratkaisut ovat $y = 1$ ja $y = -1/2$. Arvo $y = 1$ ei kelpaa, koska tällöin x:n pitäisi olla 0. Näin ollen ainoa mahdollinen lokaali ääriarvokohta on piste $(\sqrt{3}/2, -1/2)$. Tarkastus osoittaa, että tämä todella toteuttaa alkuperäisen yhtälön.

Selvitetään, onko kyseessä absoluuttinen maksimi. Joukko $x^2+y^2 = 1$, $x \geq 0$ on kompakti (suljettu ja selvästi rajoitettu). Siten jatkuva funktio $f(x,y) = x(1-y)$ saa siinä maksimiarvonsa. Pisteissä $(0,1)$ ja $(0,-1)$ funktio saa arvon 0. Koska funktio f on ei-negatiivinen, saavutetaan absoluuttinen maksimi ainoassa lokaalissa ääriarvopisteessä $(\sqrt{3}/2, -1/2)$. Ala on siis suurin, kun kolmio on tasasivuinen.

3.4.4. Esimerkki. On etsittävä lyhyin etäisyys origosta joukkoon

$$A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y = 16\}.$$

Pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2}$, mutta minimoinnin kannalta voidaan yhtä hyvin tutkia funktiota $f(x,y) = x^2 + y^2$. Asetetaan $g(x,y) = x^2y - 16$. Tällöin

$$A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}.$$

Lasketaan osittaisderivaatat

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2,$$

ja sovelletaan lausetta 3.4.2. Saadaan

$$\begin{cases} 0 = -2x + 2\lambda xy \\ 0 = -2y + \lambda x^2 \\ 0 = x^2y - 16 \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = 0$ tai $\lambda y = 1$, joista ensimmäinen ei kelpaa. Muihin yhtälöihin sijoittamisesta seuraa $x = \pm\sqrt{2}y$, mikä antaa $y = 2$. Mahdolliset ääriarvopisteet ovat $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$. Lisäksi $\nabla g(x,y) \neq 0$ joukossa A_0. Lyhin etäisyys on $\sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$. Geometrisesti on selvää, että lyhin etäisyys on olemassa; tämän analyyttinen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Yhdistämällä aikaisemmat tulokset mahdollisista ääriarvopisteistä avoimessa joukossa lauseeseen 3.4.2 saadaan aikaan metodi, jota käytetään funktion $f \in C^1(D)$ ääriarvokohtien löytämiseen kompaktissa joukossa $\overline{A} = A \cup \partial A \subset D$ seuraavilla edellytyksillä:

(i) Joukko A on avoin ja $\overline{A} = A \cup \partial A$ on kompakti.

(ii) Joukon A reuna

$$\partial A = \bigcup_{i=1}^{k} C_i,$$

missä

$$C_i \subset \{(x,y) : g_i(x,y) = 0\}$$

ja g_i on $C^1(D_i)$-funktio jossakin joukon C_i ympäristössä D_i, $i = 1, \ldots, k$. Tämä merkitsee, että A:n reuna ∂A koostuu äärellisestä määrästä C^1-funktioiden tasa-arvojoukkoja.

(iii) Joukot C_i ovat *pistevieraita*, toisin sanoen $C_i \cap C_j = \emptyset$ jokaisella $i \neq j$, lukuunottamatta äärellistä määrää "kulmapisteitä".

Mahdollisia lokaaleja ääriarvokohtia funktiolle f joukossa $\overline{A}$ ovat tällöin

a) pisteet $(x,y) \in A$, missä $\nabla f(x,y) = 0$, toisin sanoen funktion f kriittiset pisteet A:ssa,

b) pisteet $(x,y) \in C_i$, missä $\nabla g_i(x,y) = 0$, $i = 1, \ldots, k$,

c) pisteet $(x,y) \in C_i$, missä $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g_i(x,y)$, $i = 1, \ldots, k$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (lause 3.4.2) ja

d) mahdolliset "kulmapisteet" ∂A:lla.

Koska $\overline{A}$ on kompakti, niin jatkuvana funktiona f saa absoluuttisen maksiminsa ja miniminsä joukossa $\overline{A}$ ja nämä pisteet löytyvät kohdissa a)-d) mainittujen pisteiden joukosta.

Yllä esitetty menetelmä seuraa siitä, että avoimessa joukossa mahdolliset ääriarvopisteet löytyvät kriittisten pisteiden joukosta ja jos piste $(x,y) \in \partial A$ on funktion f ääriarvopiste $\overline{A}$:ssa, niin se on varmasti myös funktion $f|\partial A$ ääriarvopiste.

Usein $\overline{A}$ sisältää pisteitä, joissa f tai g eivät ole derivoituvia. Nämä pisteet täytyy tutkia erikseen.

3.4.5. Huomautus. Teoria laajenee välittömästi tapaukseen $n \geq 3$. Kun $n \geq 3$, tasa-arvojoukko

$$A_0 = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$$

on yleensä pintamainen.

3.4.6. Esimerkki. Määritä pisteet, joissa funktio

$$f(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2$$

saa suurimman arvonsa ja pienimmän arvonsa suljetussa yksikköympyrässä $\overline{B}(0,1)$.

Funktio f on selvästi $C^1(\mathbb{R}^2)$-funktio; se on itse asiassa toisen asteen muoto. Koska $\overline{B}(0,1)$ on kompakti, saa f suurimman ja pienimmän arvonsa $\overline{B}(0,1)$:ssä. Nyt

$$\overline{B}(0,1) = B(0,1) \cup \partial B(0,1),$$

missä

$$\partial B(0,1) = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Asetetaan $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Nyt ollaan edellä kuvatussa tilanteessa. Määrätään ensin f:n kriittiset pisteet $B(0,1)$:ssä. Saadaan

$$\partial_1 f(x,y) = 16x - 12y = 0$$
$$\partial_2 f(x,y) = -12x + 34y = 0.$$

Tämä on lineaarinen yhtälöryhmä, jonka determinantti on selvästi erisuuri kuin 0, joten sillä on vain triviaaliratkaisu $(x,y) = (0,0)$. Siten funktion f ainoa kriittinen piste ympyrässä $B(0,1)$ on $(0,0)$. Koska jokainen ääriarvokohta $B(0,1)$:ssä on myös kriittinen piste, niin funktion f ainoa mahdollinen ääriarvokohta avoimessa yksikköpallossa on origo.

Tutkitaan vielä mahdolliset ääriarvokohdat joukossa $\partial B(0,1)$. Nyt funktioita g_i on vain yksi, merkitään $g_i = g$, ja

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0),$$

kun (x,y) on yksikköympyrän kehällä. Riittää siis tutkia tapaus c).

Yhtälö $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ koostuu kahdesta "komponenttiyhtälöstä"

$$\begin{cases} 16x - 12y - 2\lambda x &= 0 \\ -12x + 34y - 2\lambda y &= 0. \end{cases}$$

Eliminoimalla λ saadaan

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2},$$

kun $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Tämä antaa

$$x^2 - \frac{3}{2}xy - y^2 = 0$$

eli

$$(x - 2y)(x + \frac{y}{2}) = 0,$$

mistä nähdään, että mahdolliset ääriarvokohdat $\partial B(0,1)$:llä ovat suorien $x = 2y$ ja $2x = -y$ leikkauksissa ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ kanssa. Pisteet $x = 0$ tai $y = 0$ eivät tule kyseeseen. Leikkauspisteiksi saadaan

$$\pm(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \ \pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}).$$

Nyt ei tarvitse kuin laskea f:n arvot näissä pisteissä ja pisteessä $(0,0)$ sekä valita näistä arvoista suurin ja pienin. Funktion f symmetrisyyden takia $\pm$ ei vaikuta kyseisessä pisteessä saatuun f:n arvoon. Pisteessä $(0,0)$ funktio f saa arvon 0, pisteessä $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ arvon 5 ja pisteessä $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ arvon 20.

Yhdistämällä yllä olevat tulokset havaitaan, että funktio f saa minimiarvonsa pisteessä $(0,0)$ ja maksimiarvonsa pisteissä

$$\pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}).$$

Pieni lisäanalyysi kertoo, että näissä pisteissä ääriarvot ovat aitoja. Pisteen $(0,0)$ tapauksessa tämä selviää kriittisten pisteiden avalyysin avulla, mutta pisteiden $\pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ osalta vaaditaan lisäpäättelyä. Lisäanalyysi kertoo, että funktion f määräämä toisen asteen muoto on positiivisesti definiitti, vertaa kappale 2.9.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

3.4:1 Millä suoralla sylinterillä, jonka tilavuus on $V > 0$, on pienin vaipan ja pohjien yhteenlaskettu pinta-ala?

3.4:2 Määritä funktion $f(x, y) = xy$ maksimiarvo joukossa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 4\}$.

3.4:3 Lagrangen kertoimia voidaan käyttää myös moniulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Ratkaise tehtävä 2.9:6 käyttäen Lagrangen kertoimia.

3.4:4 Etsi funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2},$$
suurin ja pienin arvo ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$.

4. INTEGROINTI TASOSSA

4.1. INTEGRAALIN MÄÄRITTELY SUORAKAITEEN YLI

Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ integrointiväliä $[a, b]$ vastaa "laatikko", joka on n:n välin karteesinen tulo. Riemann-integraali laatikon yli ei oleellisesti eroa Riemann-integraalista yksiulotteisen välin $[a, b]$ yli. Vaikeuksia integroimisessa $\mathbb{R}^n$:ssä tuottaa integroiminen yli monimutkaisempien joukkojen kuin laatikoiden. Näihin tilanteisiin joudutaan useissa käytännön sovelluksissa. Käsittelemme tässä luvussa tapausta $n = 2$ ja palaamme tapaukseen $n \geq 3$ luvussa 5. Lähdemme liikkeelle $\mathbb{R}^2$:n suljetusta suorakaiteesta eli kaksiulotteisesta laatikosta

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\} = [a, b] \times [c, d],$$

missä $a < b$ ja $c < d$.

Suorakaiteen D *ositus* eli *jako* $\{R_{ij}\}$ muodostuu välien $[a, b]$ ja $[c, d]$ osituksista: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$, missä suorakaiteet $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, muodostavat joukon D osituksen $\{R_{ij}\}$.

Suorakaiteen R_{ij} pinta-ala $\Delta(R_{ij})$ määritellään luonnollisella tavalla sivujen pituuksien tulona, siis

$$\Delta(R_{ij}) = \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}\underbrace{(y_j - y_{j-1})}_{\Delta y_j}.$$

Käytämme tässä merkintää $\Delta(R_{ij})$; myöhemmin kuitenkin siirrymme merkintään $\text{area}(R_{ij})$. Suorakaiteen R_{ij} läpimitalla tarkoitetaan sen lävistäjän pituutta

$$d(R_{ij}) = (\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2)^{1/2},$$