Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 7 - Ratkaisuehdotuksia

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa pääasiassa kertaustehtäviä.

Tehtäväsarja I

1.
$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} dy \right) dx.$$

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan tehtävä suoraan laskemalla:

$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} dy \right) dx = \int_0^1 e^x - 1\, dx = \Big/_0^1 e^x - x = e - 1 - (1 - 0) = e - 2.$$

Jos haluaa vaihtaa integroimisen järjestystä, niin se onnistuu vaihtamalla rajat:

$$\int_1^e \left(\int_{\ln y}^1 dx \right) dy = \int_1^e 1 - \ln y\, dy = \Big/_1^e 2y - y \cdot \ln y = 2e - e \cdot 1 - 2 - 0 = e - 2.$$

2.
$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} dy \right) dx.$$

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan suoraan laskemalla:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} dy \right) dx = \int_0^1 x - x^2\, dx = \Big/_0^1 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{6}.$$

Vaihdetaan itegroimisjärjestystä:

$$\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} dx \right) dy = \int_0^1 \sqrt{y} - y\, dy = \Big/_0^1 \frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{6}.$$

3.
$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \right) dy.$$

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan suoraan laskemalla:

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \right) dy = \int_0^1 2\sqrt{y}\, dy = \Big/_0^1 \frac{4}{3}y^{3/2} = \frac{4}{3}.$$

Vaihdetaan integroimisjärjestystä:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 dy \right) dx = \int_{-1}^1 1 - x^2\, dx = \Big/_{-1}^1 x - \frac{1}{3}x^3 = \frac{4}{3}.$$

4.*
$$\int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 e^{xy}\, dx \right) dy.$$

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan tämä suosiolla vaihtamalle integroimisjärjestystä:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 e^{xy}\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 \cdot \frac{1}{x}\int_0^x x e^{xy}\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x \Big/_0^x e^{xy}\right) dx = \int_0^1 x e^{x^2} - x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}(e - e^0) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}e - 1.\end{aligned}$$

Tehtäväsarja II

5. Olkoon $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq 0\}$. Piirrä kuva joukosta A, ja laske sen jälkeen integraalit

$$\int_A y\,dxdy, \qquad \int_A x^3 y\,dxdy.$$

Ratkaisuehdotus: Joukko A on kahden origokeskisen ympyrän sisus (säteet 1 ja $\sqrt{2}$) ylemmällä puolitasolla (eli "puolikas donitsi"). Integraalien laskemiseksi tehdään napakooridinaattimuunnos $w(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Sen Jacobin determinantti on r ja integroimisrajat $r \in [1,\sqrt{2}]$, $\varphi \in [0,\pi]$. Nyt

$$\begin{aligned}\int_A y\,dxdy &= \int_0^\pi \int_1^{\sqrt{2}} r\sin\varphi \cdot r\,drd\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi \left(\int_1^{\sqrt{2}} r^2\,dr\right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin\varphi(1/3 \cdot 2^{3/2} - 1/3)\,d\varphi = \frac{1}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{1}{3}\Big/_0^\pi - \cos\varphi \\ &= \frac{2}{3}\left(2\cdot\sqrt{2} - 1\right)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\int_A x^3 y\,dxdy &= \int_0^\pi \int_1^{\sqrt{2}} (r\cos\varphi)^3 \sin\varphi r\,drd\varphi = \int_0^\pi \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \cos^3\varphi \sin\varphi\,drd\varphi \\ &= \int_0^\pi \cos^3\varphi\sin\varphi \left(\Big/_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{5}r^5\right) d\varphi = \frac{1}{5}\cdot 4\sqrt{2} - \frac{1}{5}\int_0^\pi \cos^3\varphi \sin\varphi\,d\varphi \\ &= \left(\frac{1}{5}\cdot 4\sqrt{2} - \frac{1}{5}\right)\Big/_0^\pi - \frac{1}{4}\cos^4\varphi = \left(\frac{1}{5}\cdot 4\sqrt{2} - \frac{1}{5}\right)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

6.* (Martio, HT 5.2:1) Olkoon$A = \{(x,y,z);\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq h\}$ sylinteri. Määritä integraali

$$\int_A z(x^2 + y^2)\,dxdydz.$$

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan tämä integraali tekemällä sylinterikoordinaattimuunnos eli tehdään muutokset

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Tämän muutoksen Jacobin determinantti on matriisin

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -R\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti, joka on R. Integroimisrajat on $R \in [0, r]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ ja $z \in [0, h]$. Nyt voidaan laskea integraali:

$$\begin{aligned}\int_A z(x^2+y^2)\,dxdydz &= \int_{A'} z((R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi)\,dRd\varphi dz = \int_{A'} zR^2\,dRd\varphi dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^r\int_0^h zR^2\,dzdRd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^r R^2(1/2h^2)\,dRd\varphi \\ &= \frac{1}{2}h^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}r^3\,d\varphi = \frac{1}{2}h^2\frac{1}{3}r^3 2\pi = \frac{1}{3}\pi h^2 r^3.\end{aligned}$$

Tehtäväsarja III

7. Osoita, että $\mathbb{R}^3$:n napakoordinaattimuunnoksen Jacobin determinantti $= r^2\sin\theta$.

Ratkaisuehdotus: On siis laskettava matriisin

$$A = \begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{bmatrix}$$

determinantti (Martion kirja s.131). Kehitetään alimman rivin suhteen:

$$\begin{aligned}\det A &= \cos\theta\begin{vmatrix}-r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\end{vmatrix} \\ &+ (-r\sin\theta)\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix} \\ &= \cos\theta(-r\sin\theta\sin\varphi\cdot r\cos\theta\sin\varphi - r\cos\theta\cos\varphi\cdot r\sin\theta\cos\varphi) \\ &- r\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi\cdot r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi\cdot\sin\theta\sin\varphi) \\ &= \cos\theta(-r^2\sin\theta\cos\theta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)) - r\sin\theta(r\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)) \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin\sin^2\theta = -r^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\ &= -r^2\sin\theta\end{aligned}$$

8.* (Martio, HT 5.2:2) Laske ellipsoidin $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 \le 1$ tilavuus. Käytä hyväksesi muunnosta $w(x,y,z) = (ax, by, cz)$.

Ratkaisuehdotus: Tehdään kuten pyydetään eli käytetään muunnosta $w(x,y,z) = (ax, by, cz)$. Tämän muunnoksen Jacobin determinantti on matriisin

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$$

determinantti, joka on abc. Uusi integroimisalue on $A' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, mikä on tavallinen yksikköpallo. Sen tilavuus on tunnetusti $4/3\pi$. Nyt

$$\int_A 1\,dxdydz = \int_{A'} 1\cdot abc\,dxdydz = abc\int_{A'} 1\,dxdydz = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Vielä hienompi tapa olisi käyttää pallokoordinaatteja suorittaa laskutoimitus

$$\begin{aligned}abc\int_{A'} 1\,dxdydz &= abc\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 1\cdot r^2\sin\theta\,d\varphi d\theta dr \\ &= abc2\pi\int_0^1 r^2\left(\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\right)dr = abc4\pi\int_0^1 r^2\,dr \\ &= abc4\pi\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi abc.\end{aligned}$$