Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 3 - Ratkaisuehdotuksia

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa mm. lisää gradienttiin ja sen geometriseen merkitykseen liittyviä tehtäviä.

Tehtäväsarja I

1. Pyri selittämään omin sanoin, miksi yhden muuttujan funktiolle derivaatan olemassaolo takaa funktion jatkuvuuden, ja miksi sama pätee useamman muuttujan funktiolle, joka on differentioituva.

   Ratkaisuehdotus: Yhden muuttujan funktion tapaus on todistettu ensimmäisessä laskereissa. Siinä derivaatan olemassolosta tietyssä pisteessä x seuraa funktion jatkuvuus tuossa pisteessä, koska erotus $f(x+h)-f(x)$ saadaan mielivaltaisen pieneksi. Useamman muuttujan tapaus menee aivan samalla tavalla: siinä erotusta $f(x+h)-f(x)$ voidaan myöskin arvioida mielivaltaisen pieneksi.

2. Tarkastellaan jatkuvaa funktiota

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)|x|, \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

   Onko f:llä osittaisderivaatat origossa? Perustele vastauksesi huolella.

   Ratkaisuehdotus: Osoitetaan osittaisederivaatan määritelmän perusteella, että funktiolla on osittaisderivaatat origossa. Lasketaan:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_1)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,x_2)-f(x_1,x_2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(h+0)\sqrt{h^2+0^2)}-(0+0)\sqrt{0^2+0^2}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0.\end{aligned}$$

   Täten $\partial_1 f(0,0) = 0$. Tapaus

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_2)-f(x)}{h}$$

   menee samalla tavalla, joten $\partial_2 f(0,0) = 0$.

3.* Onko edellisen tehtävän funktio differentioiutuva jokaisessa tason pisteessä? Perustele jälleen vastauksesi huolella. **Vihje**: Tutustu kurssikirjan lauseeseen 2.5.2.

   Ratkaisuehdotus: Lause 2.5.2 sanoo, että funktio on differentioituva, jos sillä on olemassa osittaisderivaatat jokaisessa pisteessä ja osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Osoitetaan, että näin on. Edellisessä tehtävässä osoitettiin, että f:llä on osittaisderivaatat origossa. Pisteessä (x_1, x_2), missä $x_1 \neq 0 \neq x_2$, funktion osittaisderivaatat on

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x_1,x_2) &= \frac{2x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\\ \partial_2 f(x_1,x_2) &= \frac{x_1^2+x_1x_2+2x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.\end{aligned}$$

Nämä osittaisderivaat on tunnetusti jatkuvia kaikkialla paitsi origossa, joten ainoa mitä pitää osoittaa, että ne ovat jatkuvia myös origossa. Nyt $\partial_1 f(0,0) = 0$, joten pitää osoittaa (riittää osoittaa vain toinen osittaisderivaatta jatkuvaksi, toinen menee samalla tavalla)

$$|\partial_1 f(x_1, x_2) - 0| \to 0,$$

kun $|(x_1, x_2)| \to (0,0)$. Lasketaan (käytetään arviota $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$):

$$\begin{aligned}
|\partial_1 f(x_1, x_2) - 0| &= \left| \frac{2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| = \frac{|2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&\leq \frac{2x_1^2 + (x_1^2 + x_2^2)/2 + 2x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{5/2(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\
&= 5/2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 5/2|x| \to 0,
\end{aligned}$$

kun $|x| \to 0$. Täten $\partial_1 f(x_1, x_2)$ on jatkuva myös origossa.

Tehtäväsarja II

4. (Martion kirjan tehtävä 2.6:1) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $f = (f_1, f_2)$. Osoita, että jos f_1 ja f_2 ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^2$, niin f on differentioituva pisteessä x_0. **Ratkaisuehdotus:** Koska funktiot f_1 ja f_2 ovat differentioituvia, niin on olemassa sellaiset lineaarikuvaukset $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, että

$$\begin{aligned}
f_1(x_0 + h_1) - f_1(x_0) = L_1(h_1) + |h_1|\epsilon_1(h_1) \\
f_2(x_0 + h_2) - f_2(x_0) = L_2(h_2) + |h_2|\epsilon_2(h_2)
\end{aligned}$$

missä $\epsilon(h_i) \to 0$, kun $h_i \to 0$. Osoitetaan, etä valitsemalla $L = (L_1, L_2)$ ja $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ saadaan myös kuvaus f differentioituvaksi. Nyt $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on lineaarikuvaus (osaathan todistaa sen?). Merkitään $h = (h_1, h_2)$ ja $x_0 = (x_1, x_2)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h) - f(x_0) &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \\
&= (f_1(x_1 + h_1), f_2(x_2 + h_2)) - (f_1(x_1), f_2(x_2)) \\
&= (f_1(x_1 + h_1) - f_1(x_1), f_2(x_2 + h_2) - f_2(x_2)) \\
&= (L_1(h_1) + |h_1|\epsilon_1(h_1), L_2(h_2) + |h_2|\epsilon_2(h_2)) \\
&= L(h_1, h_2) + (|h_1|\epsilon_1(h_1), |h_2|\epsilon_2(h_2)) \\
&= L(h) + (|h_1|\epsilon_1(h_1), |h_2|\epsilon_2(h_2)).
\end{aligned}$$

Lopuksi huomataan vielä, että jos $|\epsilon_i(h_i)| < \epsilon_i$, kun $|h_i| < \delta_i$, niin $|\epsilon(h_1, h_2)| < \epsilon_1 + \epsilon_2$, kun $|(h_1, h_2)| < \delta_1 + \delta_2$. Täten $|h|\epsilon(h)$ on differentioituvuuden määritelmän mukainen (ja saadaan $\epsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$).

5. Olkoon $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ja $g(y_1, y_2) = (\sin(y_1), \cos(y_2))$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Laske ketjusääntöä käyttäen funktioiden $f \circ g$ ja $g \circ f$ derivaattamatriisit.

   Ratkaisuehdotus: Ketjusäännön mukaan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ ja $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Lasketaan funktioiden f ja g derivaatat:

$$\begin{aligned}
f'(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_1, x_2) & \partial_2 f_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) & \partial_2 f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} \\
g'(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(x_1, x_2) & \partial_2 g_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 g_2(x_1, x_2) & \partial_2 g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1) & 0 \\ 0 & -\sin(x_2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Näistä saadaan, että

$$
\begin{aligned}
f'(g(x))g'(x) &= \begin{bmatrix} 2\sin(x_1) & 2\cos(x_2) \\ 2\sin(x_1) & -2\cos(x_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(x_1) & 0 \\ 0 & -\sin(x_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\sin(x_1)\cos(x_1) & -2\cos(x_2)\sin(x_2) \\ 2\sin(x_1)\cos(x_1) & 2\cos(x_2)\sin(x_2) \end{bmatrix} \\
g'(f(x))f'(x) &= \begin{bmatrix} \cos(x_1^2+x_2^2) & 0 \\ 0 & -\sin(x_1^2-x_2^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1\cos(x_1^2+x_2^2) & 2x_2\cos(x_1^2+x_2^2) \\ -2x_1\sin(x_1^2-x_2^2) & 2x_2\sin(x_1^2-x_2^2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Tehtäväsarja III

Olkoon f pisteen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä määritelty derivoituva funktio. Sanomme, että x_0 on f:n *kriittinen piste*, jos $\nabla f(x_0) = 0$.

6. Määritä seuraavien funktioiden kriittiset pisteet:

   (a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$,

   (b) $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$,

   (c) $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$, $x \in \mathbb{R}^2$,

   (d) $k(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^3$.

   Ratkaisuehdotus:

   (a) Lasketaan funktion gradientti ja ratkaistaan gradientin nollakohdat. Nyt

   $$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2) = (0, 0),$$

   kun $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
   Tässä on käytetty kirjan määritelmää 2.9.6. jonka mukaan funktion $f \in C^1(D)$ kriittiset pisteet voidaan ratkaista yhtälöstä $\nabla f(x) = 0$. Selvästi osittaisderivaat ovat jatkuvia funktioita, niiden olemassaolo jätetään nyt kuitenkin ylimääräiseksi harjoitukseksi.

   (b) Kuten edellisessä kohdassa:

   $$\nabla g(x_1, x_2) = (2x_1, -2x_2) = (0, 0),$$

   kun $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

   (c) Kuten edellisissä kohdissa:

   $$\nabla h(x_1, x_2) = (2x_1 + 2, 2x_2 - 2) = (0, 0),$$

   kun $(x_1, x_2) = (-1, 1)$.

   (d) Kuten edellisissä kohdissa:

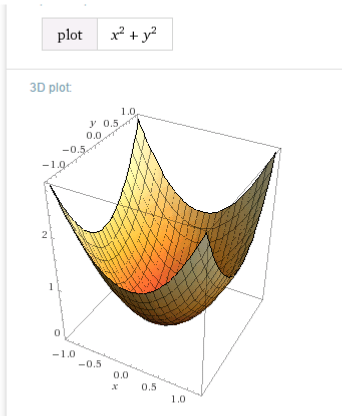
   $$\nabla k(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 0) = (0, 0, 0),$$

   kun $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, x_3)$.

7. Kuvaile omin sanoin edellisen tehtävän funktioiden käytöstä kriittisten pisteiden ympäristössä.

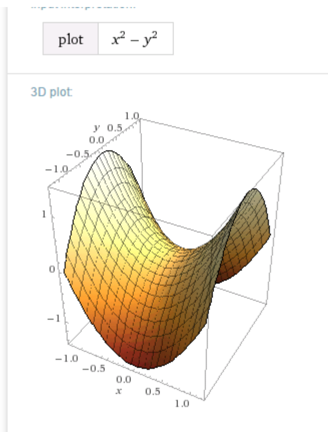
Ratkaisuehdotus: Muistutetaan mieleen Analyysin kurssilta tuttu tapaus. Funktiolla $f(x) = x^3$ on derivaatan nollakohta pisteessä $x = 0$, mutta se ei kuitenkaan ole funktion ääriarvo (vaan niin sanottu satulapiste). Tutkitaan, miltä edellisen tehtävän funktioiden kuvaajat käyttäytyvät.

(a) Funktion kuvaaja näyttää tältä:



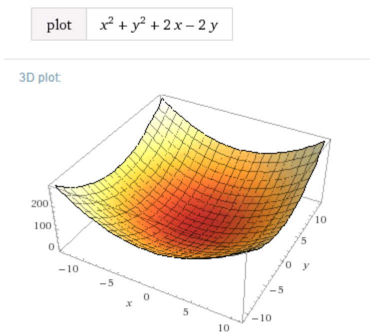
Kuvasta nähdään, että origossa tosiaan on minimi, vieläpä aito globaali sellainen.

(b) Funktion kuvaaja näyttää tältä:



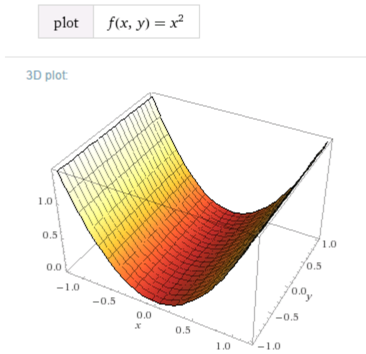
Kuvasta nähdään, että gradientin nollakohta ei nyt ole ääriarvo.

(c) Funktion kuvaaja näyttää tältä:



Kuvasta nähdään, että gradientin nollakohta on aito globaali minimi.

(d) Nyt ei voida piirtää enää funktion kuvaaja, koska se on pinta $\mathbb{R}^4$:ssa... Katsotaan miltä tilanne näyttää tapauksessa $k(x_1, x_2) = x_1^2$ eli $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nyt kuvaaja näyttää tältä:



Tapaus $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vastaa tätä, eli gradientin nollakohdat ovat globaaleja minimejä.

8. Perehdy kurssikirjan lauseeseen 2.9.5 ja sen todistukseen. Osaatko omin sanoin kuvailla, miksi lause pätee, ja mikä on todistuksen keskeinen idea? Päteeko lauseen käänteinen suunta, eli jos x_0 on kriittinen piste, niin onko se välttämättä lokaali ääriarvokohta? Anna todistus, tai keksi vastaesimerkki.

Ratkaisuehdotus: Kuten lauseen todistuksessa sanotaan, se seuraa suoraan reaaliarvoisen funktion tapauksessa. Jos esim. funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on lokaali maksimi kohdassa $x = (x_1, x_2)$, niin funktiolla $\varphi(t) = f(t, x_2)$ lokaali maksimi kohdassa $\varphi(x_1)$. Tällöin $\varphi'(x_1) = 0$ ja siksi $\varphi'(x_1) = 0$ (kuten analyysin kurssilla on todistettu). Nyt pätee myös, että $\varphi'(x_1) = \partial_1 f(x_1, x_2)$. Tässä siis φ on kuvaus $\mathbb{R}$:ltä $\mathbb{R}$:ään.

Lauseen käänteinen suunta ei päde, vastaesimerkkinä edellisen tehtävän kohta b).