Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 4 - Ratkaisuehdotuksia

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa ensimmäisiä integrointiharjoituksia.

Tehtäväsarja I

1. Laske funktion
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)e^{x_3}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$
suunnattu derivaatta pisteesä $(0,0,1)$ suuntaan $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

   Ratkaisuehdotus: Käytetään tähän suunnatulle derivaatalle olevaa lausetta (näin voidaan tehdä, koska f on differentioituva pisteessä x_0!)
$$\partial_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v.$$
Nyt siis $x_0 = (0,0,1)$, $v = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ ja $\nabla f(x) = (e^{x_3}, e^{x_3}, (x_1 + x_2)e^{x_3})$, joten
$$\begin{aligned}\partial_v f(0,0,1) &= \nabla f(0,0,1) \cdot (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \\ &= (e^1, e^1, (0+0)e^1) \cdot (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \\ &= \frac{e}{\sqrt{2}} + 0 + 0 = \frac{e}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

2. (Martion kirjan tehtävä 2.7:1) Osoita, että suunnatulle derivaatalle pätee $\partial_{-v} f(x) = -\partial_v f(x)$.

   Ratkaisuehdotus: Nyt on käytettävä suunnatun derivaatan määritelmää
$$\partial_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$
Sijoitetaan v:n paikalle $-v$. Tällöin vektorien laskusääntöjen nojalla
$$\begin{aligned}\partial_{-v} f(x_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t(-v)) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + (-t)v) - f(x_0)}{t} \\ &= -\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + (-t)v) - f(x_0))}{-t}.\end{aligned}$$
Merkitään vielä $h := -t$, jolloin saadaan
$$\partial_v f(x_0) = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = -\partial_v f(x_0).$$

3. (Martion kirjan tehtävä 2.7:2) Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos f on lisäksi derivoituva, niin $\nabla f(-x) = -\nabla f(x)$. Määritä tällöin $\nabla f(0)$.

   Ratkaisuehdotus: Koska f on differentioituva, sillä on kaikki osittaisderivaat $\partial_i f(x)$ ja $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$. Tutkitaan osittaisderivaattaa ∂_i pisteessä $-x$:
$$\begin{aligned}\partial_i f(-x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x + he_i) - f(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-(x - he_i)) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x - he_i) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + (-h)e_i) - f(x)}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x + (-h)e_i) - f(x)}{-h} = -\partial_i f(x).\end{aligned}$$

Viimeisellä rivillä on tehty sama kikka kuin edellisessä tehtävässä eli korvattu $-h = t$. Tällöin saadaan, että

$$\nabla f(-x) = (\partial_1 f(-x), \ldots, \partial_n f(-x)) = (-\partial_1 f(x), \ldots, -\partial_n f(x)) = -\nabla f(x).$$

Määritetään lopuksi $\nabla f(0)$. Nyt pätee, että $\nabla f(-0) = -\nabla f(0)$ eli $\nabla f(0) = -\nabla f(0)$. Tästä seuraa, että $\nabla f(0) = 0$.

Tehtäväsarja II

4. Olkoon $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, ja

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)(2x_2 - 1).$$

(a) Määritä K:n reuna ∂K, ja sen sisäpisteiden joukko $K^0 = K \setminus \partial K$.

(b) Määritä f:n kriittiset pisteet K^0:ssa, ja laske f:n arvot näissä pisteissä.

(c) Tutki seuraavaksi funktion käytöstä reunalla ∂K. Jakamalla joukko K sopiviin osiin määritä f:n ääriarvot reunapisteissä. **Vihje:** Muista, kuinka yhden muuttujan funktion ääriarvot määrättiin!

(d) Määritä funktion f maksimi ja minimi joukossa K, sekä pisteet joissa ne saavutetaan.

Ratkaisuehdotus:

(a) Joukko K on tason neliö. Sen sisäpisteiden joukko on

$$K^0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$$

ja reuna on neljän janan, $\{0\} \times [0,1]$, $\{1\} \times [0,1]$, $[0,1] \times \{0\}$, $[0,1] \times \{1\}$, yhdiste.

(b) Lasketaan derivaatan nollakohdat:

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_2 - 1, 2x_1 - 4) = (0,0) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (2, 1/2).$$

Huomataan, että tämä piste on joukon K ulkopuolella.

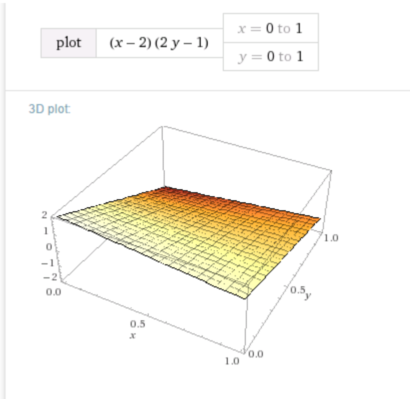
(c) Jaetaan K neljään osaan

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,t); \, 0 \leq t \leq 1\} \\ R_2 &= \{(0,t); \, 0 \leq t \leq 1\} \\ R_3 &= \{(t,1); \, 0 \leq t \leq 1\} \\ R_4 &= \{(t,0); \, 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

Määritellään sitten funktiot $\varphi_1(t) = f(1,t)$, $\varphi_2(t) = f(0,t)$, $\varphi_3(t) = f(t,1)$ ja $\varphi_4(t) = f(t,0)$. Nämä ovat yhden muuttujan funktioita, joten ratkaistaan niiden ääriarvot. Funktioiden ääriarvot löytyvät nyt joko derivaatan nollakohdista tai välin $[0,1]$ päätepisteistä. Nyt esimerkiksi $\varphi_1(t) = f(1,t) = -2t + 1$, joten $\varphi_1(0) = 1$ ja $\varphi_1(1) = -1$. Derivaatalla $\varphi_1'(t) = -2$ ei ole nollakohtia. Samoin voidaan laskea muiden funktioden arvot välin päätepisteissä

$$\begin{aligned} \varphi_2(1) &= f(0,1) = -2, \quad \varphi_2(0) = f(0,0) = 2 \\ \varphi_3(1) &= f(1,1) = -1, \quad \varphi_3(0) = f(0,1) = -2 \\ \varphi_4(1) &= f(1,0) = 1, \quad \varphi_4(0) = f(0,0) = 2. \end{aligned}$$

(d) Koska K on suljettu ja rajoitettu (eli kompakti) avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko ja $f : K \to \mathbb{R}$ jatkuva ja sisäpisteissä differentioituva, niin funktion f ääriarvot löytyvät joko gradientin nollakohdissa tai joukon K reunalla. Kohdassa b) huomattiin, että joukossa K ei ole gradientin nollakohtia, joten ääriarvot löytyvät reunalta ∂K. Edellisessä kohdassa onkin laskettu f:n ääriarvot, jotka ovat siis -2 kohdassa $(0, 1)$ ja 2 kohdassa $(0, 0)$.



5.* Tarkastellaan jatkuvaa funktiota

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)|x|, \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Määritä f:n maksimi ja minimi suljetussa yksikkökiekossa $D = \{x \in \mathbb{R}^2; \ |x| \leq 1\}$. **Vihje**: voit parametrisoida reunan esimerkiksi vaihekulmaa θ käyttäen, $\partial D = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)); \ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Ratkaisuehdotus: Käytetään samaa strategiaa kuin edellisessä tehtävässä eli lasketaan funktion arvot gradientin nollakohdissa ja määrittelyjoukon reunalla. Nyt gradientti on

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}{|x|}, \frac{x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2}{|x|} \right),$$

kun $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ja $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ (tämä oli todistettu viime viikon laskareissa). Tästä saadaan, että $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$, kun $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Funktion arvo tässä pisteessä on 0.

Tehdään sitten kuten tehtävänannon vihje neuvoo eli parametrisoidaan joukon D reuna vaihekulmaa käyttäen, eli $\partial D = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)); \ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Nyt $f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$ $(|\cos(\theta), \sin(\theta))| = 1!)$ on yhden muuttujan funktio ja sen derivaatan nollakohta

$$f'(\cos(\theta), \sin(\theta)) = -\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ tai } \frac{5\pi}{4}.$$

Lisäksi $f(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)) = \sqrt{2}$ ja $f(\cos(5\pi/4), \sin(5\pi/4)) = -\sqrt{2}$. Reunoilla funktio saa arvot $\cos(0) + \sin(0) = 1$ ja $\cos(2\pi) + \sin(2\pi) = 1$. Tästä saadaan, että funktion f maksimi on $\sqrt{2}$ ja minimi on $-\sqrt{2}$.

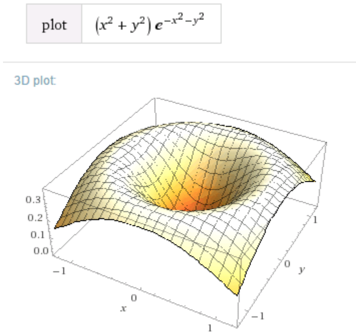
Tehtäväsarja III

Tarkastellaan funktiota

$$f(x_1, x_2) = |x|^2 e^{-|x|^2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

6.* Määritä f:n kriittiset pisteet, ja tutki ovatko nämä lokaaleja ääriarvoja.

Ratkaisuehdotus: Katsotaan ensin, että miltä funktion kuvaaja näyttää:



Näyttäisi siis siltä, että funktiolla on lokaali maksimi ja minimi. Ratkaistaan ensin gradientin nollakohdat:

$$\begin{aligned}\nabla f(x_1,x_2) &= (2x_1e^{-x_1^2-x_2^2}-2x_1e^{-x_1^2-x_2^2}(x_1^2+x_2^2), 2x_2e^{-x_1^2-x_2^2}-2x_2e^{-x_1^2-x_2^2}(x_1^2+x_2^2))\\ &= (2x_1e^{-x_1^2-x_2^2}(1-x_1^2-x_2^2), 2x_2e^{-x_1^2-x_2^2}(1-x_1^2-x_2^2)) = (0,0),\end{aligned}$$

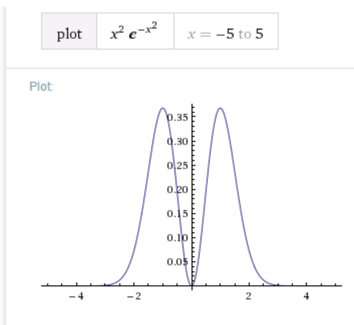
kun $(x_1,x_2)=(0,0)$ tai $|x|=1$. Funktion arvo nollassa on $f(0,0)=0$ ja pisteessä $|x|=1$ arvo on $f(x_1,x_2)=1\cdot e^{-1}=e^{-1}$. Tämän lisäksi voidaan päätellä, että funktiolla on lokaali minimi kohdassa $(0,0)$, koska funktion arvot ovat aina nollaa suurempia (erityisesti, koska $e^{-|x|^2}$ on aina aidosti nollaa suurempi). Kuvasta nähdään, että pisteissä $|x|=1$ funktiolla on lokaali maksimi (osoitetaan seuraavassa tehtävässä, että nämä on itseasiassa globaaleja ääriarvoja.)

7. Määritä raja–arvo
$$\lim_{|x|\to\infty} f(x),$$
ja päättele funktion f globaali maksimi ja minimi, sekä joukot missä nämä saavutetaan. **Vihje**: Huomaa, että funktio f on *radiaalinen*, eli sen arvot riippuvat vain pisteen x etäisyydestä origosta. Tutki funktion käytöstä kuulissa $\{x\in\mathbb{R}^3; |x|\le R\}$, ja anna säteen R kasvaa lopulta rajatta.

Ratkaisuehdotus: Merkitään $|x|=R$ ja lasketaan (käytetään analyysin kurssilta tuttua l'Hôpitalin sääntöä):

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{R\to\infty} f(R) = \lim_{R\to\infty} R^2e^{-R^2} = \lim_{R\to\infty}\frac{R^2}{e^{-R^2}} = 0.$$

Funktion kuvaaja näyttää tältä:



Päätellään siis, että globaali minimi saavutetaan kohdassa $(0,0)$ ja globaali maksimi saavutetaan kohdassa $|x|=1$.

Tehtäväsarja IV

8. Olkoon $R = [0,1] \times [0,1]$. Laske integraali

$$\int_R x_1 e^{x_1+x_2}\, dx.$$

Ratkaisuehdotus: Tehtävän funktio on jatkuva, joten käytetään integraalin laskemiseen lausetta 4.1.6. Laskemalla saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_R x_1 e^{x_1+x_2} dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 x_1 e^{x_1+x_2} dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 \left(/_0^1 x_1 e^{x_1+x_2} \right) dx_1 \\ &= \int_0^1 x_1 (e^{x_1+1} - e^{x_1}) dx_1 = \int_0^1 x_1 e^{x_1+1} dx_1 - \int_0^1 x_1 e^{x_1} dx_1.\end{aligned}$$

Ratkaistaan tästä vielä kumpainenkin integraali osittaisintegroinnilla:

$$\int_0^1 x_1 e^{x_1+1} dx_1 = /_0^1 x e^{x_1+1} - \int_0^1 e^{x_1+1} dx = 1 \cdot e^2 - 0 \cdot e^1 - e^2 + e^1 = e$$
$$\int_0^1 x_1 e^{x_1} dx_1 = /_0^1 x_1 e^{x_1} - \int_0^1 e^{x_1} dx_1 = 1 \cdot e - 0 \cdot e^0 - e + e^0 = 1.$$

Täten

$$\int_R x_1 e^{x_1+x_2} dx = e - 1.$$

9. Olkoon $\tilde{R} = [0,1] \times [1,2]$. Laske integraali

$$\int_{\tilde{R}} \sin(\pi x_1 x_2)\, dx.$$

Ratkaisuehdotus: Tehtävä on siirrtetty viitoslaskareihin.