Valitaan $h = tv,\ t \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} &= \frac{\nabla f(x_0)\cdot(tv)}{t} + \frac{|tv|}{t}\varepsilon(tv)\\ &= \nabla f(x_0)\cdot v + \frac{|tv|}{t}\varepsilon(tv).\end{aligned}$$

Nyt

$$\frac{|tv|}{t}\varepsilon(tv) \to 0,$$

kun $t \to 0$, koska

$$\left|\frac{|tv|}{t}\right| = |v|$$

ja $\varepsilon(tv) \to 0$, kun $t \to 0$. Näin ollen $\partial_v f(x_0) = \nabla f(x_0)\cdot v$. Lisäksi, koska $|v| = 1$, saamme Cauchy-Schwartzin epäyhtälön (1.1.3) nojalla

$$|\partial_v f(x_0)| = |\nabla f(x_0)\cdot v| \le |\nabla f(x_0)||v| = |\nabla f(x_0)|.$$

□

2.7.3. Esimerkki. Lasketaan funktion $f(x,y) = \sin x + y$ suunnattu derivaatta origossa suuntaan $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2) = v$. Huomaa, että $|v| = 1$. Kuvaus $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, joten f on derivoituva origossa. Lisäksi pätee

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x)) = (\cos x, 1),$$

joten $\nabla f(0) = (1,1)$. Lauseesta 2.7.1 saadaan

$$\partial_v f(0) = (1,1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Tämän voi laskea myös suoraan määritelmästä.

Selvitetään seuraavaksi gradientin ∇f geometrinen merkitys. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja $f : D \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että $f \in C^1(D)$. Tarkastellaan f:n tasa-arvojoukkoa $f(x,y) = c$. Oletetaan, että on olemassa polku

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

$x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x(t), y(t)) = c,$$

toisin sanoen polku γ "kulkee" tasa-arvojoukossa $f(x,y) = c$. Oletetaan lisäksi, että $x, y \in C^1([a,b])$.

2.7.4. Huomautus. Jos $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, $t_0 \in [a,b]$, niin sanotaan, että polulla γ on tangentti pisteessä t_0. Jos $y'(t_0) \neq 0$, niin tangentin yhtälö on

$$y - y(t_0) = \frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}(x - x(t_0)).$$

Tähän palataan myöhemmin.

2.7.5. Lause (Gradientin "geometria"). *Olkoon γ ja f kuvauksia kuten edellä. Tällöin*

$$\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = 0,\ t \in [a,b]$$

eli

$$\nabla f(x(t), y(t))\cdot(x'(t), y'(t)) = 0,\ t \in [a,b].$$

Toisin sanoen ∇f on kohtisuorassa jokaista tasa-arvojoukossa kulkevaa C^1-polkua vastaan.

Todistus. Olettamuksen perusteella $f(x(t), y(t)) = c$ kaikilla $t \in [a,b]$. Käytetään ketjusääntöä C) ja tarkastellaan funktiota h

$$t \mapsto (f\circ\gamma)(t) = f(x(t), y(t)).$$

Tämä on kuvaus väliltä $[a,b]$ reaaliluvuille. Koska γ sisältyy tasa-arvojoukkoon, tämä funktio on vakio c välillä $[a,b]$, josta seuraa, että $h'(t) = (f\circ\gamma)'(t) = 0$, $t \in [a,b]$. Määrätään seuraavaksi $\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$. Ketjusääntö C) antaa

$$0 = h'(t) = \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t),$$

mikä onkin väite. □

Lauseiden 2.7.1 ja 2.7.5 seurauksena saadaan, että funktion f gradientilla ∇f on seuraava ominaisuus: Gradientti ∇f on kohtisuorassa f:n tasa-arvojoukkoja vastaan ja osoittaa suuntaan, johon f kasvaa voimakkaimmin.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

2.7:1 Osoita, että suunnatulle derivaatalle pätee $\partial_{-v} f(x) = -\partial_v f(x)$.

2.7:2 Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos f on lisäksi derivoituva, niin $\nabla f(-x) = -\nabla f(x)$. Määritä tällöin $\nabla f(0)$.

2.7:3 Maaston korkeus pisteessä (x, y) on

$$h(x,y) = \frac{10}{3 + x^2 + 2y^2}.$$

Pisteen $(3, 2)$ kautta kulkee puro. Määritä puron suunta tässä pisteessä.

2.7:4 Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $\partial_v f(x_0) = 0$ jokaisella $v \in \mathbb{R}^n$, jolle $|v| = 1$. Mitä tällöin tiedetään funktion f käyttäytymisestä pisteestä x_0?

2.8. KORKEAMMAN KERTALUVUN OSITTAISDERIVAATAT JA TAYLORIN KAAVA

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko. Tarkastelemme funktioita $f : D \to \mathbb{R}$. Yleistykset tapaukseen $n \geq 3$ ovat suoraviivaisia. Jos $\partial_1 f(x)$ on olemassa joukon D jokaisessa pisteessä, saadaan funktio $\partial_1 f : D \to \mathbb{R}$.

Funktiota $\partial_1 f$ voidaan yrittää derivoida x:n tai y:n suhteen eli muodostaa *toisen kertaluvun osittaisderivaatat* $\partial_1\partial_1 f$, merkitään $\partial_1^2 f = f_{xx}$, tai $\partial_2\partial_1 f = f_{xy}$. Vastaavalla menettelyllä voidaan muodostaa $\partial_2\partial_2 f$, merkitään $\partial_2^2 f = f_{yy}$, tai $\partial_1\partial_2 f = f_{yx}$. Nämä ovat toisen kertaluvun osittaisderivaattoja: kaikissa yllä mainituissa tapauksissa funktiota f on derivoitu kaksi kertaa. Jatkamalla vastaavasti saadaan $\partial_1^3 f = \partial_1\partial_1\partial_1 f$, $\partial_1\partial_2\partial_1 f$ ja niin edelleen, mikäli kyseiset derivaatat ovat olemassa. Derivaattaa $\partial_1^n f$ sanotaan n. kertaluvun osittaisderivaataksi ja esimerkiksi derivaattaa $\partial_1\partial_2\partial_1 f$ kolmannen kertaluvun osittaisderivaataksi. Käytetään merkintää $f \in C^p(D)$, jolla tarkoitetaan, että f ja sen kaikki kertalukua p tai tätä pienempää kertalukua olevat osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia D:ssä. Tällöin

$$C^0(D) = C(D) = \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ jatkuva}\}$$

ja $C^1(D)$ on jo tuttu kerran jatkuvasti derivoituvien funktioiden luokka.

2.8.1. Esimerkki. Olkoon $f(x,y) = \sin(xy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= y\cos(xy),\\
\partial_2 f(x,y) &= x\cos(xy),\\
\partial_2\partial_1 f(x,y) &= \cos(xy) - yx\sin(xy),\\
\partial_1\partial_1 f(x,y) &= -y^2\sin(xy);\\
\partial_1\partial_2 f(x,y) &= \cos(xy) - xy\sin(xy),\\
\partial_2\partial_2 f(x,y) &= -x^2\sin(xy),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Havaitaan, että $\partial_1\partial_2 f(x,y) = \partial_2\partial_1 f(x,y)$. Osoittautuu, että tämä ei ole sattuma. Funktio f on sellainen, että sillä on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat $\mathbb{R}^2$:ssa. Tällaisten funktioiden joukkoa merkitään $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Yleisesti merkitään $C^\infty(D)$, jos funktiolla f on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat avoimessa joukossa $D \subset \mathbb{R}^n$.

2.8.2. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ eli $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Nyt $f \in C(\mathbb{R}^2)$, mutta $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$, sillä f:llä ei ole osittaisderivaattoja pisteessä 0. Kuitenkin $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

2.8.3. Lause. *Olkoon $f \in C^2(D)$. Tällöin $\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f$.*

Todistus. Ideana on tavallisen väliarvolauseen käyttö. Pitää näyttää, että kun $(x,y) \in D$, niin

$$\partial_1\partial_2 f(x,y) = \partial_2\partial_1 f(x,y).$$

Kiinnitetään (x,y)-keskinen neliö Q, joka kokonaisuudessaan on D:n sisällä. Tämä on mahdollista, koska D on avoin. Seuraavassa tarkastellaan pisteitä (x,y), $(x+h,y)$, $(x,y+k)$, $(x+h,y+k)$, missä h, $k \neq 0$ ovat niin pieniä, että nämä pisteet ovat Q:n sisällä. Asetetaan

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(x+h,t) - f(x,t),\\ \psi(s) &= f(s,y+k) - f(s,y).\end{aligned}$$

Tällöin φ on määritelty y-keskisellä välillä ja ψ x-keskisellä välillä. Havaitaan, että

$$\begin{aligned}q(h,k) &= \varphi(y+k) - \varphi(y)\\ &= f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y)\\ &= \psi(x+h) - \psi(x).\end{aligned}$$

Derivoimalla funktio φ ja soveltamalla väliarvolausetta saadaan

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \partial_2 f(x+h,t) - \partial_2 f(x,t),\\ q(h,k) &= \varphi(y+k) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)k\\ &= [\partial_2 f(x+h,y+\theta k) - \partial_2 f(x,y+\theta k)]k,\end{aligned}$$

missä ξ pisteiden y ja $y+k$ välissä eli $\xi = y+\theta k$, $\theta \in (0,1)$. Seuraavaksi sovelletaan väliarvolausetta funktioon $s \mapsto \partial_2 f(s,y+\theta k)$. Tämä antaa

$$q(h,k) = \partial_1\partial_2 f(x+\eta h, y+\theta k)hk,$$

missä $\eta \in (0,1)$. Antamalla $(h,k) \to 0$ nähdään, että jokaisella luvulla $h,k \neq 0$

$$\frac{q(h,k)}{hk} \to \partial_1\partial_2 f(x,y),$$

koska $\partial_1\partial_2 f$ on jatkuva pisteessä (x,y). Lähtien liikkeelle esityksestä

$$q(h,k) = \psi(x+h) - \psi(x)$$

tullaan samanlaisella laskutoimituksella tulokseen

$$\frac{q(h,k)}{hk} \to \partial_2\partial_1 f(x,y), \text{ kun } (h,k) \to (0,0).$$

Tästä seuraa, että $\partial_2\partial_1 f(x,y) = \partial_1\partial_2 f(x,y)$. □

Lausetta 2.8.3 vastaava lause pätee kaikilla $n \geq 2$. Itse asiassa todistus on sama, sillä lauseen väite on oleellisesti kaksiulotteinen. Lauseen oletukset ovat hieman liian voimakkaat, mutta lause 2.7.5 tulee yleisemmin käyttöön edellä mainitussa muodossa.

Kehitetään seuraavaksi useampiulotteinen *Taylorin kaava.* Tarkastelemme vain ääriarvosovelluksissa tärkeää toisen kertaluvun Taylorin kaavaa tapauksessa $n = 2$. Emme edes pyri minimioletuksiin.

2.8.4. Lause (toisen asteen Taylorin kehitelmä). *Olkoon* $D \subset \mathbb{R}^2$ *avoin,* $f \in C^3(D)$ *ja* $(x_0, y_0) \in D$. *Jos* $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$, *niin*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)\, h + \partial_2 f(x_0, y_0)\, k \\ &+ 2^{-1}(\partial_1\partial_1 f(x_0, y_0)\, h^2 + 2\,\partial_1\partial_2 f(x_0, y_0)\, hk + \partial_2\partial_2 f(x_0, y_0)\, k^2) \\ &+ (h^2 + k^2)^{3/2} B(h, k), \end{aligned}$$

missä $B(h, k)$ *on rajoitettu funktio jossakin pallossa* $B(0, r)$, $r > 0$.

2.8.5. Huomautus. Tapaus $n = 1$: Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ ja $f \in C^3[a, b]$. Tällöin

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{1}{2!} f''(x_0)\, h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0 + \theta h)\, h^3,$$

kun $x_0 + h \in [a, b]$ ja $\theta \in [0, 1]$. Tämä on tavallinen funktion f toisen kertaluvun Taylorin kehitelmä, missä jäännöstermissä on käytetty f:n kolmatta derivaattaa. Tämä on lauseen 2.8.4 kaava tapauksessa $n = 1$. Erona on, että avoimen joukon D sijasta on käytetty suljettua väliä $[a, b]$. Huomaa, että koska f''' on jatkuva, niin se on rajoitettu pisteen x_0 ympäristössä.

Lauseen 2.8.4 todistus. Kuten funktion derivaattaa tutkittaessa havaittiin, annettu kaava pätee aina, kun $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$. Ongelmana on funktion B rajoittuneisuus jossain pallossa $B(0, r)$. Tämän todistamiseksi kiinnitetään h ja k ja tarkastellaan funktiota

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad 0 \le t \le 1.$$

Tämä on määritelty välillä $[0, 1]$ kun h ja k on valittu riittävän pieniksi. Tämän jälkeen todistus on yksiulotteinen. Nyt $F \in C^3([0, 1])$ ja yksiulotteinen kaava antaa

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \frac{F'''(\theta)}{3!}t^3, \quad 0 \le \theta \le t. \tag{2.8.6}$$

Sovelletaan ketjusääntöä C), sivu 40, funktioon $F = f \circ \gamma$, missä

$$\gamma(t) = (x_0 + th, y_0 + tk).$$

Tämä antaa

$$\begin{aligned} F'(t) &= \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \partial_1 f(x_0 + th, y_0 + tk)\, h + \partial_2 f(x_0 + th, y_0 + tk)\, k. \end{aligned}$$

Soveltamalla tätä uudestaan saadaan

$$\begin{aligned} F''(t) = \partial_{11} f(x_0 + th, y_0 + tk)\, h^2 &+ 2\,\partial_{12} f(x_0 + th, y_0 + tk)\, hk \\ &+ \partial_{22} f(x_0 + th, y_0 + tk)\, k^2, \end{aligned}$$

missä toisessa termissä on sovellettu osittaisderivaatan vaihtosääntöä. Sijoittamalla nämä kaavaan (2.8.6) arvolla $t = 1$ saadaan

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) + \frac{1}{6} F'''(\theta),$$

missä

$$\begin{aligned} F(0) &= f(x_0, y_0), \\ F'(0) &= \partial_1 f(x_0, y_0)\, h + \partial_2 f(x_0, y_0)\, k, \\ F''(0) &= \partial_{11} f(x_0, y_0)\, h^2 + 2\,\partial_{12} f(x_0, y_0)\, hk + \partial_{22} f(x_0, y_0)\, k^2. \end{aligned}$$

On vielä näytettävä oleellinen osa todistuksesta, nimittäin että

$$B(h, k) = (h^2 + k^2)^{-3/2} F'''(\theta)/6 \tag{2.8.7}$$

on vaadittua muotoa. Huomaa, että $B(0, 0)$ voidaan määritellä nollaksi. Jos F derivoidaan kolmesti, saadaan f:n kolmannen kertaluvun osittaisderivaattojen, kerrottuna luvuilla h ja k, äärellinen summa, jonka termit ovat tyypillisesti muotoa

$$\partial_{112} f(x_0 + th, y_0 + tk)\, h^2 k.$$

Sijoittamalla $t = \theta$, käyttämällä arvioita $|h| \leq \sqrt{h^2+k^2}$, $|k| \leq \sqrt{h^2+k^2}$ ja havaitsemalla, että kolmannet osittaisderivaatat ovat jatkuvia, joten ne ovat rajoitettuja pisteen (x_0, y_0) ympäristössä, nähdään kaavasta (2.8.7), että $B(h,k)$ on rajoitettu eräässä origon ympäristössä. Huomaa, että esimerkiksi

$$|(h^2+k^2)^{-3/2}h^2k| \leq \frac{|x|^2|x|}{|x|^3} \leq 1,$$

kun merkitään $x = (h,k)$. □

2.8.8. Huomautus. Tapauksessa $n \geq 3$ lauseen 2.8.4 kaava saa seuraavan muodon: Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, $f \in C^3(D)$, $x_0 \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ ja $x_0 + h \in D$. Tällöin

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_0)\, h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(x_0)\, h_i h_j + |h|^3 B(h),$$

missä B on rajoitettu eräässä origon ympäristössä.

Funktioille $\mathbb{R}^n$:ssä on myös korkeamman asteen kehitelmiä. Ne saadaan samoin kuin edellä. Edellä kehitetyt toisen asteen kehitelmät riittävät kuitenkin useissa sovelluksissa.

2.8.9. Esimerkki. Etsitään funktion

$$f(x,y) = sin(x^2+y^2)$$

toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $(0,0) = 0$. Selvästi $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ja

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0,\\
\partial_1 f(x,y) &= 2x\cos(x^2+y^2)\\
\partial_2 f(x,y) &= 2y\cos(x^2+y^2)\\
\partial_{11} f(x,y) &= 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2)\\
\partial_{22} f(x,y) &= 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2)\\
\partial_{12} f(x,y) &= -4xy\sin(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = \partial_{12} f(0,0) = \partial_{21} f(0,0) = 0$$

ja $\partial_1^2 f(0,0) = \partial_2^2 f(0,0) = 2$. Saadaan siis

$$\sin(h^2+k^2) = 1/2\,(2h^2+2k^2) + (h^2+k^2)^{3/2}\,B(h,k),$$

missä $B(h,k)$ on rajoitettu eräässä 0:n ympäristössä. Derivaattaa ja Taylorin kehitelmää käytetään funktioiden lokaaliin approksimointiin. Jos halutaan approksimoida funktiota f pisteen 0 lähellä, niin kannattaa approksimoinnin tarkkuusvaatimuksesta riippuen menetellä seuraavasti. Ensin kannattaa tyytyä funktioon $g_0(x,y) \equiv 0$, sillä f on jatkuva 0:ssa ja $f(0) = 0$. Tarkempaa approksimointia varten kannattaa ottaa approksimoivaksi funktioksi

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Funktion f toisen asteen Taylorin kehitelmän voi löytää toisellakin tavalla, sillä

$$\sin t = t + B(t)\,t^3,$$

missä $B(t)$ on rajoitettu. Tämä on tavallinen yksiulotteinen Taylorin kaava. Sijoittamalla tähän $t = h^2 + k^2$ saadaan

$$\sin(h^2 + k^2) = h^2 + k^2 + B(h^2 + k^2)(h^2 + k^2)^3.$$

Tämä on jäännöstermin suhteen tarkempi kehitelmä kuin aikaisempi.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

2.8:1 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin x \cos(xy)$. Määritä derivaatat $\partial_2\partial_2 f(x, y)$, $\partial_1\partial_2 f(x, y)$ ja $\partial_2\partial_2\partial_2 f(x, y)$.

2.8:2 Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Funktio $u \in C^2(D)$ on *harmoninen* joukossa D, jos

$$\partial_1\partial_1 u + \partial_2\partial_2 u = 0$$

D:n jokaisessa pisteessä. Näytä, että funktio

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

on harmoninen $\mathbb{R}^2$:ssa. Anna esimerkki funktiosta $u \in C^2(D)$, joka ei ole harmoninen $\mathbb{R}^2$:ssa.

2.8:3 Onko olemassa funktiota $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jonka toisen kertaluvun osittaisderivaatta $\partial_2\partial_2 u$ on olemassa jokaisessa pisteessä, mutta joka ei ole jatkuva?

2.8:4 Yhtälön $x + 2y + z + e^{2z} = 1$ ratkaisu voidaan esittää muodossa $z = f(x, y)$, kun (x, y) on lähellä origoa. Määritä $f(0, 0)$, $\partial_1 f(0, 0)$ ja $\partial_1\partial_2 f(0, 0)$.

2.9. ÄÄRIARVOT

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$. Usein A oletetaan $\mathbb{R}^n$:n avoimeksi osajoukoksi.

2.9.1. Määritelmä. Funktiolla f on *lokaali (paikallinen) maksimi* pisteessä $x_0 \in A$, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ kun } x \in A \cap B(x_0, \delta). \tag{2.9.2}$$

Pisteessä x_0 on *aito* lokaali maksimi, jos kaavassa (2.9.2) pätee aito epäyhtälö kun $x \neq x_0$. Vastaavalla tavalla määritellään (aito) lokaali minimi.

2.9.3. Huomautus. Yllä on pieni ero tapauksessa $n = 1$ annettuun määritelmään. Olkoon esimerkiksi $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ja $f(x) = x$. Yllä olevan määritelmän mukaan $x_0 = 0$ on f:n aito lokaali minimipiste ja $x_0 = 1$ on f:n aito lokaali maksimikohta. Yleensä reaaliakselin välillä Δ määritellyn funktion lokaali maksimi- ja minimikohta voivat olla vain Δ:n sisäpisteissä. Joskus tätä käytetään myös kun $n \geq 2$.

Sanomme joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ pistettä x_0 A:n *sisäpisteeksi*, jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $B(x_0, \delta) \subset A$. Merkitsemme joukon A sisäpisteiden joukkoa $\mathrm{int}A$. Sisäpisteiden joukko $\mathrm{int}A$ on avoin joukko jokaisella joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$.

Lokaaleja maksimi- ja minimipisteitä kutsutaan myös *lokaaleiksi ääriarvokohdiksi*.

2.9.4. Esimerkki. Jos A on avoin, niin kaikki A:n pisteet ovat A:n sisäpisteitä. Jos $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, niin 0 ja 1 eivät ole A:n sisäpisteitä ja $\mathrm{int}A = (0, 1)$.

2.9.5. Lause (peruslause). *Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 joukon A sisäpiste ja funktion f lokaali ääriarvopiste. Jos $\partial_i f(x_0)$ on olemassa jollakin $i = 1, \ldots, n$, niin $\partial_i f(x_0) = 0$.*

Todistus. Lause seuraa vastaavasta lauseesta tapauksessa $n = 1$. Olkoon x_0 funktion f lokaali maksimikohta. Tarkastellaan funktiota

$$t \overset{\varphi}{\mapsto} f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,i-1}, t, x_{0,i+1}, \ldots, x_{0,n}),$$

$x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$. Koska x_0 on A:n sisäpiste, on φ määritelty ainakin jollakin välillä $(x_{0,i} - \delta, x_{0,i} + \delta) = \Delta$, $\delta > 0$. Koska f:llä on lokaali maksimi pisteessä x_0, niin valitsemalla δ riittävän pieneksi pätee

$$\varphi(t) \le \varphi(x_{0,i}),$$

kun $t \in \Delta$. Siten funktiolla φ on lokaali maksimi pisteessä $x_{0,i}$.

Jos funktiolla $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}$ on derivaatta välin Δ sisäpisteessä $x_{0,i}$, niin tunnetusti lokaalissa ääriarvopisteessä $\varphi'(x_{0,i}) = 0$. Toisaalta osittaisderivaatan määritelmän perusteella $\varphi'(x_{0,i}) = \partial_i f(x_0)$, joten $\partial_i f(x_0) = 0$. Vastaavasti näytetään, että $\partial_i f(x_0) = 0$, jos f:llä on lokaali minimi pisteessä x_0. □

2.9.6. Määritelmä. Olkoon $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Pisteitä $x \in D$, joissa

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)) = (0, \ldots, 0) = 0,$$

sanotaan f:n *kriittisiksi pisteiksi*. Näissä pisteissä saatuja f:n arvoja sanotaan f:n *kriittisiksi arvoiksi*.

Lauseesta 2.9.5 seuraa: Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f \in C^1(D)$. Tällöin f:n lokaalit ääriarvokohdat löytää f:n kriittisten pisteiden joukosta.

2.9.7. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (4 - x^2 - y^2)\, e^{x+y}$. Määrätään funktion f kriittiset pisteet. Osittaisderivaatoiksi saadaan

$$\partial_1 f(x,y) = e^{x+y}(-2x + 4 - x^2 - y^2),$$
$$\partial_2 f(x,y) = e^{x+y}(-2y + 4 - x^2 - y^2).$$

Määrätään ne pisteet (x,y), joissa

$$\nabla f(x,y) = (\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)) = (0,0).$$

Koska $e^{x+y} > 0$ kaikilla (x,y), niin kriittiset pisteet toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -2x + 4 - x^2 - y^2 = 0, \\ -2y + 4 - x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan $x = y$ ja sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön seuraa, että $x = -2$ tai $x = 1$. Siten pisteet $(-2,-2)$ ja $(1,1)$ ovat ainoita mahdollisia funktion f kriittisiä pisteitä. Välittömästi havaitaan, että tämä kaksi pistettä todella toteuttavat $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Vaikeampaa sen sijaan on päättää, ovatko kriittiset pisteet f:n lokaaleja ääriarvokohtia.

2.9.8. Huomautus. Tapauksessa $n = 1$ funktion f toinen derivaatta tarjoaa riittävän ehdon lokaaleille ääriarvoille. Olkoon $f \in C^2(a,b)$. Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, niin pisteessä x_0 on aito lokaali minimi ja vastaavasti jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, niin pisteessä x_0 on aito lokaali maksimi.

Tutkitaan tapausta $n = 2$ ja pyritään löytämään vastaava kriteerio lokaaleille ääriarvokohdille. Olkoon $f \in C^3(D)$ ja $(x_0, y_0) \in D$ f:n kriittinen piste eli $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Taylorin kaavasta, lause 2.8.4, seuraa:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) \\ &+ 2^{-1}\underbrace{\left(\partial_1\partial_1 f(x_0, y_0)\, h^2 + 2\,\partial_1\partial_2 f(x_0, y_0)\, hk + \partial_2\partial_2 f(x_0, y_0)\, k^2\right)}_{\text{vastaa } f''(x_0)\text{:aa}} \\ &+ (h^2 + k^2)^{3/2} B(h, k). \end{aligned}$$

Tämä johtaa tutkimaan muotoa

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

olevan kuvauksen $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ käyttäytymistä. Funktiota Q sanotaan *toisen asteen neliömuodoksi.*

Riippuen vakioiden a, b, c arvoista Q käyttäytyy eri tavoilla. Seuraavat neljä tapausta ovat mahdollisia, ja valitsemalla

$$\begin{aligned} a &= \partial_{11} f(x_0, y_0), \\ b &= \partial_{12} f(x_0, y_0), \\ c &= \partial_{22} f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

voidaan tehdä alla olevat johtopäätökset.

(i) $Q(h, k)$ on *positiivisesti definiitti* eli $Q(h, k) > 0$ kun $(h, k) \neq (0, 0)$. Tällöin (x_0, y_0) on aito lokaali minimi.

(ii) $Q(h, k)$ on *negatiivisesti definiitti* eli $Q(h, k) < 0$ kun $(h, k) \neq (0, 0)$. Tällöin (x_0, y_0) on aito lokaali maksimi.

(iii) $Q(h, k)$ on *indefiniitti* eli saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Tällöin (x_0, y_0) ei ole ääriarvokohta, vaan niin sanottu *satulapiste.*

(iv) $Q(h, k)$ on *positiivisesti (negatiivisesti) semidefiniitti* eli

$$Q(h, k) \geq 0 \ (Q(h, k) \leq 0)$$

kaikilla (h, k) ja $Q(h, k) = 0$ jollakin $(h, k) \neq 0$. Mitään johtopäätöstä pisteen (x_0, y_0) ääriarvoluonteesta ei voida tällä perusteella tehdä, vaan tilanne pitää tutkia erikseen.

Itse asiassa osoittautuu, että oletus $f \in C^2(D)$ riittää ylläoleviin johtopäätöksiin. Sovelluksissa on kuitenkin yleensä voimassa $f \in C^3(D)$.

2.9.9. Huomautus. Tapaus (iii) ei tule vastaan kun $n = 1$, sillä $Q(h) = f''(x_0)\, h^2$.

2.9.10. Esimerkki. (i) $Q(h, k) = h^2 + k^2$ on positiivisesti definiitti.

(ii) $Q(h, k) = -(h^2 + k^2)$ on negatiivisesti definiitti.

(iii) $Q(h, k) = hk$ on indefiniitti, samoin $Q(h, k) = h^2 - k^2$.

(iv) $Q(h, k) = h^2$ on positiivisesti semidefiniitti, koska $Q(h, k) = 0$ kun $(h, k) = (0, k)$.

Jätämme kohtien (i)-(iv) todistamisen harjoitustehtäväksi. Todistus on samanlainen kuin tapauksessa $n = 1$ ja perustuu Taylorin kaavaan.

2.9.11. Huomautus. Tilanteessa $n \geq 3$ pitää tutkia neliömuotoa

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \quad h = (h_1, \ldots, h_n), \quad a_{ij} = \partial_i \partial_j f(x_0).$$

Muuten tilanne on täysin vastaava. Funktiota Q kutsutaan f:n *Hessin neliömuodoksi pisteessä* x_0.

Tutkitaan seuraavaksi, milloin $Q(h, k)$ on jotain tyypeistä (i) - (iv). Olkoon Q edelleen $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$.

(i) Q on positiivisesti definiitti täsmälleen silloin, kun $a > 0$ ja determinantti

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0. \tag{2.9.12}$$

(ii) Q on negatiivisesti definiitti täsmälleen silloin, kun $a < 0$ ja epäyhtälö (2.9.12) pätee.

(iii) Q on indefiniitti täsmälleen silloin, kun

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0.$$

(iv) Q on semidefiniitti täsmälleen silloin, kun

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Näiden kriteerioiden todistaminen ei ole vaikeaa; itse asiassa ne liittyvät toisen asteen pintojen karakterisoimiseen. Vastaavat, hieman monimutkaisemmat ehdot ovat voimassa kun $n \geq 3$.

2.9.13. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$. Määritetään f:n kriittiset pisteet ja lokaalit ääriarvokohdat. Funktio f kuuluu joukkoon $C^1(\mathbb{R}^2)$, joten lokaalit ääriarvokohdat ovat kriittisten pisteiden joukossa. Kriittiset pisteet (x,y) toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 6x^2 - 6y = 0, \\ \partial_2 f(x,y) = -6x + 6y = 0, \end{cases}$$

josta helpolla päättelyllä saadaan $x = 0$ ja $y = 0$ tai $x = 1$ ja $y = 1$. Ainoat kriittiset pisteet ovat siten $(0,0)$ ja $(1,1)$.

Seuraavaksi pitää tutkia, ovatko nämä pisteet lokaaleja ääriarvokohtia. Koska $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ riittää), voidaan käyttää edellä

esitettyä teoriaa. Nyt derivaatat $\partial_1\partial_1 f(x,y) = 12x$, $\partial_1\partial_2 f(x,y) = -6$ ja $\partial_2\partial_2 f(x,y) = 6$. Pisteessä $(0,0)$ $a = 0$, $b = -6$, $c = 6$, joten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = -36.$$

Näin ollen piste $(0,0)$ on satulapiste eikä siten lokaali ääriarvokohta. Pisteessä $(1,1)$ $a = 12 > 0$, $b = -6$, $c = 6$, joten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0,$$

eli kohdan (i) nojalla Q on positiivisesti definiitti, mistä seuraa, että piste $(1,1)$ on (aito) lokaali minimipiste.

2.9.14. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy\, e^{-(x^2+y^2)/2}$. Osittaisderivaatoiksi saadaan

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= y\,(1 - x^2)\, e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ \partial_2 f(x,y) &= x\,(1 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ \partial_1\partial_1 f(x,y) &= xy\,(x^2 - 3)\, e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ \partial_1\partial_2 f(x,y) &= (1 - x^2)\,(1 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ \partial_2\partial_2 f(x,y) &= xy\,(y^2 - 3)\, e^{-(x^2+y^2)/2}, \end{aligned}$$

ja koska $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, saadaan ensimmäisistä osittaisderivaatoista kriittisiksi pisteiksi $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ ja $(-1,-1)$. Sijoittamalla piste $(0,0)$ saadaan $a = c = 0$ ja $b = 1$, joten se on satulapiste. Pisteet $(1,1)$ ja $(-1,-1)$ sijoittamalla saadaan $a = c = -2/e < 0$ ja $b = 0$, joten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0.$$

Nämä ovat siten aidot lokaalit maksimit. Pisteissä $(1,-1)$ ja $(-1,1)$ saadaan $a = c = 2/e > 0$ ja $b = 0$, joten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0.$$

Nämä ovat siis aidot lokaalit minimit.

Käsittelemme seuraavassa reaaliarvoisten kuvausten *absoluuttisia* eli *globaaleja ääriarvoja*. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Allaolevat lauseet täydentävät vanhoja tuttuja tietoja välillä $[a, b]$ määriteltyjen funktioiden käyttäytymisestä.

2.9.15. Määritelmä. Funktiolla f on *absoluuttinen (globaali) minimi* pisteessä $x_0 \in A$, jos

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ kaikilla } x \in A. \tag{2.9.16}$$

Pisteessä x_0 on *aito* absoluuttinen minimi, mikäli kaavassa (2.9.16) pätee aito epäyhtälö jokaisella $x \neq x_0$. Vastaavalla tavalla määritellään *(aito) absoluuttinen maksimi.*

2.9.17. Lause. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti, epätyhjä joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin f:llä on ainakin yksi absoluuttinen minimi- ja maksimipiste.*

Todistus. Näytetään ensin, että f on rajoitettu eli että on olemassa sellainen $M < \infty$, että

$$|f(x)| \leq M \text{ kaikilla } x \in A.$$

Tehdään vastaoletus: f ei ole rajoitettu. Tällöin on olemassa sellaiset pisteet $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots$, että

$$|f(x_i)| \geq i.$$

Koska A on kompakti, on olemassa sellainen osajono x_{i_j}, että $x_{i_j} \to x_0$, kun $j \to \infty$ ja $x_0 \in A$. Nyt $|f(x)|$ jatkuva, joten

$$\underbrace{|f(x_{i_j})|}_{\to\infty} \to |f(x_0)| < \infty,$$

mikä on ristiriita.

Näytetään sitten, että f:llä on esimerkiksi maksimipiste. Koska f on rajoitettu ja $A \neq \emptyset$, on olemassa $\sup\{f(x) : x \in A\} = M_0$. Supremumin määritelmästä seuraa, että on olemassa sellainen jono (x_i), $x_i \in A$, että $f(x_i) \to M_0$. Kuten edellä, joukon A kompaktiudesta seuraa, että on olemassa jonon (x_i) osajono (x_{i_j}) ja $x_0 \in A$, joille pätee $x_{i_j} \to x_0$. Nyt f:n jatkuvuudesta seuraa, että $f(x_0) = M_0$. □

2.9.18. Esimerkki. Tutkitaan tilastotieteessä usein käytettyä *pienimmän neliösumman metodia.* Tarkastellaan havaintosarjaa, jossa on tehty useita mittauksia

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

missä esimerkiksi arvo x_1 on kappaleen x lämpötila, x_2 on kappaleen x läpimitta ja niin edelleen. Olkoon sitten $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ 1. mittaus, $x^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$ 2. mittaus ja $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ viimeinen eli k. mittaus.

Oletamme, että mittaukset on tehty samoissa olosuhteissa, kuitenkin esimerkiksi eri mittaajia käyttämällä. Yritämme selvittää "parhaan" arvion x:lle. Olkoon

$$x_0 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x^j = \left(\frac{1}{k}\sum_j x_1^j, \ldots, \frac{1}{k}\sum_j x_n^j\right),$$

havaintojen x^j, $j = 1, \ldots, k$, keskiarvo. Huomaa, että x_0 on $\mathbb{R}^n$:n vektori. Pyrimme löytämään sen pisteen $x \in \mathbb{R}^n$, joka minimoi lausekkeen

$$|x - x^1|^2 + \ldots + |x - x^k|^2.$$

Näytämme, että keskiarvolla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on tämä ominaisuus eli että funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x - x^1|^2 + \ldots + |x - x^k|^2,$$

aito absoluuttinen minimi on pisteessä x_0.

Kirjoittamalla f:n lauseke koordinaattimuodossa $x = (x_1, \ldots, x_n)$ saadaan

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} [(x_1 - x_1^j)^2 + \ldots + (x_n - x_n^j)^2].$$

Jos funktiolla f on aito absoluuttinen minimi pisteessä x, niin x on funktion f kriittinen piste, koska $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Näin ollen

$$\partial_1 f = 2 \sum_{j=1}^{k} (x_1 - x_1^j) = 0$$

$$\vdots$$

$$\partial_n f = 2 \sum_{j=1}^{k} (x_n - x_n^j) = 0.$$

Näistä yhtälöistä seuraa

$$x_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \; i = 1, \ldots, n,$$

joten todellakin $x = x_0$. On vielä näytettävä, että x_0 on f:n aito absoluuttinen minimi. Päätellään tämä suoraan. Ensinnäkin $f(x) \geq 0$

jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$, ja pätee

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty.$$

Tämä on helppoa nähdä, sillä kun $|x|$ on suuri, on jokin x_i myös suuri ja $f(x) \geq (x_i - x_i^1)^2$, joten myös $f(x)$ on tällöin suuri. Siten $f(x) \geq 1 + f(x_0)$, kun $|x| \geq M$ jollakin $M > 0$. Joukko $\overline{B}(0, M)$ on kompakti, joten f saa siellä absoluuttisen minimiarvonsa. Se on absoluuttinen minimi koko $\mathbb{R}^n$:ssä, koska $f(x) \geq 1 + f(x_0)$ pallon $\overline{B}(0, M)$ ulkopuolella ja pallossa $\overline{B}(0, M)$ funktio f saa arvon $f(x_0)$, joka on pienempi kuin $1 + f(x_0)$. Absoluuttisessa minimipisteessä osittaisderivaattojen arvo 0. Ainoa tällainen piste on x_0, joten pisteessä x_0 funktio f saa absoluuttisen miniminsä pisteessä x_0.

Enää pitää osoittaa, että piste x_0 antaa aidon absoluuttisen minimin. Tämä nähdään helposti vastaoletuksella: Jos $x \in \mathbb{R}^n$ on sellainen, että $f(x) = f(x_0)$, niin myös pisteessä x funktio f saavuttaa absoluuttisen minimin. Siten x on f:n kriittinen piste, jossa välttämättä $\nabla f(x) = 0$. Mutta x_0 on ainoa tällainen piste, joten $x = x_0$.

Se, että pisteessä x_0 f saavuttaa aidon lokaalin minimin voidaan tutkia myös käyttämällä funktion f Hessin neliömuotoa pisteessä x_0, jolloin havaitaan sen olevan positiivisesti definiitti. Myös suoralla laskulla on mahdollista todistaa, että $f(x) > f(x_0)$ kaikilla $x \neq x_0$.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

2.9:1 Määritä funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^4 - 3xy^3 + 3xz + 2,$$

kriittiset pisteet.

2.9:2 Määritä edellisen tehtävän funktion f lokaalit ääriarvokohdat.

2.9:3 Osoita ääriarvokohdan määritelmää 2.9.1 käyttäen, että piste $(0,0)$ ei ole funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$, ääriarvokohta.

2.9:4 Olkoon $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$ kolmio. Etsi pisteet, joissa funktio $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 e^{-(x+y)}$, saa suurimman ja pienimmän arvonsa.

2.9:5 Osoita, että jos neliömuoto $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

on positiivisesti definiitti, niin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $Q(h,k) \geq \varepsilon(h^2 + k^2)$ jokaisella $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
Vihje: Näytä ensin, että $Q(h,k) \geq \varepsilon > 0$, kun (h,k) on kompaktin joukon $\partial B(0,1)$ piste, ja päättele tästä loput väitteestä.

2.9:6 Mitkä ovat sen suorakulmaisen laatikon mitat, jonka tilavuus $V > 0$ ja jolla on pienin mahdollinen pinta-ala kantta lukuunottamatta? Absoluuttista minimiä ei tarvitse perustella.

2.9:7 Olkoon $f \in C^1(\mathbb{R})$ funktio, jolla on ainoassa kriittisessä pisteessään aito lokaali minimi. Osoita, että tällöin piste on myös funktion f aito absoluuttinen minimi. Näytä, että tämä ei päde, kun $n = 2$.
Vihje: Kokeile funktiota $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$$

ja näytä, että $(0,0)$ on ainoa aito lokaali minimipiste. Osoita tämän jälkeen, että f:llä ei ole absoluuttista minimipistettä.

2.9:8 Onko funktioilla $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + 2y$ ja $g(x,y) = xe^{-y^2}$, suurimpia tai pienimpiä arvoja?

2.9:9 On tehty joukko havaintoja $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(k,m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - m)^2.$$

Olkoon (k_0, m_0) funktion f absoluuttinen minimi. Minkä yhtälöryhmän piste (k_0, m_0) toteuttaa? Tässä on kyseessä pienimmän neliösumman metodilla tapahtuva regressiosuoran määrääminen. Absoluuttisen minimin olemassaoloa ei tarvitse tutkia.

2.9:10 Etsi ne pisteet, joissa funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2xy$, saa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa $\overline{B}(0,2)$.

2.9:11 Olkoon $A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 - x^2 = 0\}$. Onko funktiolla $f : A_0 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$, suurinta tai pienintä arvoa?