Transformaatioryhmät

Harj. 9 (17.11.2016)

1. Tarkastellaan kirjallisuudessa esiintyviä kahta eri määritelmää käsitteelle vahva kuvaus: (X, Y top. avaruuksia, $f: X \to Y$ jatkuva)

   A : $f^{-1}(C)$ on kompakti jokaisella Y:n kompaktilla osajoukolla C

   B : f on suljettu kuvaus ja $f^{-1}(y)$ on kompakti $\forall y \in Y$.

   Osoita, että aina $B \Rightarrow A$.

   Osoita, että $A \Rightarrow B$, jos X, Y ovat Hausdorffin avaruuksia ja Y on lok. kompakti.

2. Osoita, että funktiot R_h ja L_h (Luennot, s. 65) ovat lineaarisia isomorfismeja.

3. Osoita: Jos $f: G \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin myös $|f|$ on jatkuva ja
$$\left| \int f(g)\, dg \right| \leq \int |f|(g)\, dg .$$
(Luennot, s. 66)

4. Tarkastellaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja $\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ja $\mathcal{V}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

   Laske matriisit $[\mathcal{V}' | \mathcal{V}]$ ja $[\mathcal{V} | \mathcal{V}']$.

   Lineaarikuvauksen $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ matriisi kannan $\mathcal{V}$ suhteen on $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   Mikä on sen matriisi kannan $\mathcal{V}'$ suhteen?

5. Konstruoi Haarin integraali tapauksessa, jossa G on äärellinen ryhmä, ja todista ominaisuudet (a) - (e) Teoreemassa 4.1.

6. Jatkoa tehtävään 5. Osoita myös yksikäsitteisyys.