Transf. ryhmät

Harj. 9

Ratkaisuja.

1. $B \Rightarrow A$: olk. $C \subset Y$ kompakti ja olk. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ joukon $f^{-1}C$ avoin peite X:ssä.

Jokaisella $y \in C$ on $f^{-1}(y)$ kompakti oletuksen B nojalla, joten $\exists$ äärellinen $A_y \subset A$ s.e.

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{\alpha \in A_y} U_\alpha \overset{\text{merk.}}{=} U_y .$$

Merk. $V_y = Y \setminus f(X \setminus U_y)$.

Koska $X \setminus U_y \Subset X$, niin $B \Rightarrow f(X \setminus U_y) \Subset Y$ eli $V_y \circledcirc Y$.

Nyt $f^{-1}(V_y) \subset U_y$:

$$x \in f^{-1}(V_y) \Rightarrow f(x) \in V_y \Rightarrow f(x) \notin f(X \setminus U_y)$$
$$\Rightarrow x \notin X \setminus U_y \Rightarrow x \in U_y .$$

Lisäksi $y \in V_y$:

koska $f^{-1}(y) \subset U_y$, niin $y \notin f(X \setminus U_y)$

eli $y \in Y \setminus f(X \setminus U_y) = V_y$.

Joukot V_y, $y \in C$ muodostavat C:n avoimen peitteen. Koska C on kompakti, $\exists\, y_1, \dots, y_n$ s.e. $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$.

Siis

$$f^{-1}C \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\alpha \in A_{y_i}} U_\alpha ,$$

eli peitteen $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ äärellinen osapeite peittää $f^{-1}C$:n. $\square$

$A \Rightarrow B$ (jos X, Y Hausd. ja Y lok. komp.): Harj. 7 / Teht. 5 nojalla f on suljettu kuvaus.

Koska $\{y\}$ on kompakti, on oletuksen A nojalla $f^{-1}(y)$ kompakti $\forall y \in Y$. $\square$

2. $$R_h : C(G, \mathbb{R}) \to C(G, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto R_h f \quad , \quad \text{missä } R_h f(g) = f(gh).$$

- R_h lineaarinen, eli $R_h(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \cdot R_h f_1 + a_2 \cdot R_h f_2$:

$$R_h(a_1 f_1 + a_2 f_2)(g) = (a_1 f_1 + a_2 f_2)(gh) = a_1 \cdot f_1(gh) + a_2 \cdot f_2(gh)$$
$$= a_1 \cdot R_h f_1(g) + a_2 \cdot R_h f_2(g) = (a_1 \cdot R_h f_1 + a_2 \cdot R_h f_2)(g).$$

- R_h bijektio: os., että $R_h \circ R_{h^{-1}} = id$ ja $R_{h^{-1}} \circ R_h = id$.

$$(R_h \circ R_{h^{-1}})(f)(g) = R_h(R_{h^{-1}}f)(g) = R_{h^{-1}}f(gh)$$

$$= f(ghh^{-1}) = f(g), \quad \forall f \in C(G,\mathbb{R}), \forall g \in G.$$

Siis $(R_h \circ R_{h^{-1}})(f) = f \quad \forall f$ eli $R_h \circ R_{h^{-1}} = id$.

Vastaavasti $R_{h^{-1}} \circ R_h = id$. Siis R_h on bijektio. $\square$

L_h vastaavasti.

3. $|f|$ jatkuva:

olk. $g_0 \in G$, $\varepsilon > 0$.

Val. g_0:n ymp. U s.e. $|f(g_0) - f(g)| < \varepsilon \quad \forall g \in U$.

Nyt $\forall g \in U$ on

$$\big|\,|f|(g_0) - |f|(g)\big| = \big|\,|f(g_0)| - |f(g)|\,\big| \le |f(g_0) - f(g)| < \varepsilon.$$

$\uparrow$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$ pätee $||x|-|y|| \le |x+y|$;
val. $x = f(g_0)$, $y = -f(g)$

Siis $|f|$ on jatkuva.

Epäyhtälö:

$\forall g \in G$ pätee $\quad (-|f|)(g) = -|f(g)| \le f(g) \le |f(g)| = |f|(g)$,

joten

$$-|f| \le f \le |f|.$$

Integraaleille saadaan vastaavat epäyhtälöt

$$\int (-|f|)(g)\,dg \le \int f(g)\,dg \le \int |f|(g)\,dg$$

eli

$$-\int |f|(g)\,dg \le \int f(g)\,dg \le \int |f|(g)\,dg,$$

mistä seuraa

$$\left|\int f(g)\,dg\right| \le \int |f|(g)\,dg.$$

$\square$

4. Esitetään kannan $\mathcal{V}$ vektorit kannassa $\mathcal{V}'$:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = \tfrac{1}{2} \text{ ja } y = -\tfrac{1}{4}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff x = 0 \text{ ja } y = \tfrac{1}{2}$$

Siis matriisi $[\mathcal{V}' | \mathcal{V}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

Koska $\mathcal{V} = e$ (standardikanta), saadaan $[\mathcal{V}|\mathcal{V}']$ suoraan s.e. matriisin sarakkeet ovat kannan $\mathcal{V}'$ vektorit, siis

$$[\mathcal{V}|\mathcal{V}'] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\text{Huom. } [\mathcal{V}|\mathcal{V}'] = [\mathcal{V}'|\mathcal{V}]^{-1})$$

Lin. kuvauksen A matriisi kannan $\mathcal{V}'$ suhteen on

$$[A]_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'} = [\mathcal{V}'|\mathcal{V}] \cdot [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \cdot [\mathcal{V}|\mathcal{V}']$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Koska G on äärellinen (diskreetti topologia), on jokainen funktio $G \to \mathbb{R}$ jatkuva. Merk. $G = \{g_1, \dots, g_m\}$, $g_1 = e$ neutraalialkio.
Määr.

$$I(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(g_i), \qquad f: G \to \mathbb{R}$$

(a) $$I(f_1+f_2) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(f_1+f_2)(g_i)}_{=f_1(g_i)+f_2(g_i)} = \frac{1}{m}\left(\sum_i f_1(g_i) + \sum_i f_2(g_i)\right)$$
$$= \frac{1}{m} \sum f_1(g_i) + \frac{1}{m} \sum f_2(g_i) = I(f_1) + I(f_2).$$

(b) $$I(cf) = \frac{1}{m} \sum_i (cf)(g_i) = \frac{1}{m} \sum_i c \cdot f(g_i) = c \cdot \frac{1}{m} \sum f(g_i) = c \cdot I(f).$$

(c) Jos $f(g_i) \geq 0 \ \forall i$, on $I(f) = \frac{1}{m} \sum f(g_i) \geq 0$ ok.

(d) $$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} 1 = \frac{1}{m} \cdot m = 1.$$

(e) Jos $h \in G$, niin $\{g_1 h, \dots, g_m h\} = \{g_1, \dots, g_m\}$, alkiot mahdollisesti eri järjestyksessä.
Siis

$$I(R_h f) = \frac{1}{m} \sum f(g_i h) = \frac{1}{m} \sum f(g_i) = I(f).$$

Vastaavasti $I(L_h f) = I(f)$.

$\square$

6. Ominaisuuden (d) nojalla $I(\underline{1}) = 1$.

Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $\underline{x}$ vastaava vakiofunktio, niin

$$I(\underline{x}) = I(x \cdot \underline{1}) \underset{(b)}{=} x \cdot I(\underline{1}) \underset{(d)}{=} x \cdot 1 = x .$$

Olkoon sitten $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ ja $x \in \mathbb{R}$. Tark. funktiota

$$\bar{f} : G \to \mathbb{R} , \quad \bar{f}(g_i) = \begin{cases} x , & i = i_0 \\ 0 , & i \neq i_0 \end{cases} .$$

Jos nyt $h \in G$, niin funktio $R_h \bar{f}$ on samaa muotoa, eli yhdessä pisteessä $= x$, muissa $= 0$. Kun käydään läpi kaikki $h \in G$, saadaan kaikki mahdolliset tätä muotoa olevat funktiot $G \to \mathbb{R}$.

Laskemalla nämä yhteen saadaan

$$\sum_{h \in G} R_h \bar{f} \equiv x .$$

Siis

$$x = \int \sum_{h \in G} R_h \bar{f}(g) \, dg = \sum_{h \in G} \int R_h \bar{f}(g) \, dg$$

$$\underset{(e)}{=} \sum_{h \in G} \int \bar{f}(g) \, dg = m \cdot \int \bar{f}(g) \, dg ,$$

joten

$$\int \bar{f}(g) \, dg = \frac{x}{m} . \qquad (*)$$

Olkoon sitten $f : G \to \mathbb{R}$ mikä tahansa funktio, merk. $a_i = f(g_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Määr.

$$f_i : G \to \mathbb{R} , \quad f_i(g) = \begin{cases} a_i , & \text{jos } g = g_i \\ 0 , & \text{jos } g \neq g_i \end{cases} ,$$

jolloin $f = \sum_{i=1}^{m} f_i$. Nyt $(*) \Rightarrow \int f_i(g) \, dg = \frac{a_i}{m}$.

Siis

$$\int f(g) \, dg = \int \sum_{i=1}^{m} f_i(g) \, dg = \sum_{i=1}^{m} \int f_i(g) \, dg$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(g_i) .$$

$\square$