

Transformaatioryhmät

Harj. 8 (10.11.2016)

1. (Kts. Lemma 3.2 (iii))

Anna esimerkki tilanteesta, jossa $G(B \cap C | A) \neq G(B|A) \cap G(C|A)$.

2. Tarkastellaan ehtoja

A: G :n toiminta X :ssä on vahva

B: toiminnan määrittelevä kuvaus $G \times X \rightarrow X$ on vahva kuvaus.

Päteekö $A \Rightarrow B$? Päteekö $B \Rightarrow A$? Perusteluksi todistus tai vastaesimerkki.

3. Olk. G topologinen ryhmä, X G -avaruus, $U \subseteq X$, $V \subseteq X$.

Osoita, että $G(U|V) \subseteq G$. (Erityisesti $G(U|U)$ on ein ympäristö G :ssä, jos $U \neq \emptyset$)

4. Olk. G lok. kompakti ryhmä, X Hausdorff G -avaruus.

Osoita, että toiminta on Cartan \Leftrightarrow jokaisella pisteellä $x \in X$ on G -invariantti ympäristö, jossa toiminta on vahva'.

5. Kts. Esim. 3.1.3)

a) Osoita, että toiminta ei ole vahva' eikä vahva

b) Etsi pisteelle $(1,0)$ ympäristö U , jolle $G(U|U)$ on kompakti.

6. Olk. X, Y G -avaruuksia (G top. ryhmä) ja $f: X \rightarrow Y$ G -kuvauk.

Olk. $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$.

a) Onko joukkojen $G(A|B)$ ja $G(fA|fB)$ välillä inklusiota jompaankumpaan suuntaan tai yhtäsuurus?

b) Onko joukkojen $G(C|D)$ ja $G(f^{-1}C|f^{-1}D)$ välillä inklusiota jompaankumpaan suuntaan tai yhtäsuurus?

7. Tarkastellaan ryhmää (S^1, \cdot) . Funktiolle $f \in C(S^1, \mathbb{R})$ määritellään

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt,$$

missä \int on Riemannin integraali.

Osoita, että I toteuttaa Teoreeman 4.1 ehdot (a) - (e)

(joten I on Haarin integraali ryhmälle (S^1, \cdot)).