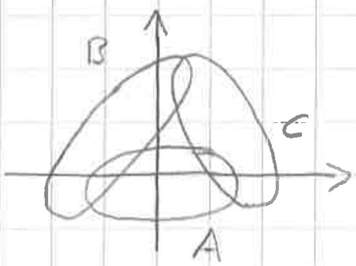
Transf.ryhmät
Harj. 8
Ratkaisuja.



1. Tark. $\mathbb{R}$:n toimintaa $\mathbb{R}^2$:ssa

$$(t, (x,y)) \mapsto (x+t, y)$$

ja olk. A, B, C kuten kuvassa.
Tällöin $G(B \cap C \mid A) = \emptyset$,
mutta esim. $0 \in G(B \mid A) \cap G(C \mid A)$.

2. (i) $B \Rightarrow A$

ol. $\Phi : G \times X \to X$ vahva kuvaus
v. toiminta on vahva
tod. riittää todistaa Lauseen 3.16 ehto (iii):
olk. $A \subset X$ kompakti; tarkastellaan $\Phi| : G \times A \to X$.
olk. $C \subset X$ kompakti. Koska Φ on vahva kuvaus, on
$\Phi^{-1}C \subset G \times X$ kompakti. Selvästi $(\Phi|)^{-1}C \subset \Phi^{-1}C$
ja $(\Phi|)^{-1}C \subset G \times A \subset G \times X$.
Siis $(\Phi|)^{-1}C$ on kompaktin joukon $\Phi^{-1}C$ suljettu osajoukko,
siis kompakti.

$\square$

(ii) $A \not\Rightarrow B$

Esim. 1) $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(t, (x,y)) \mapsto (x+t, y) \qquad \text{(on vahva toiminta)}$$

Tark. kompaktin joukon $\{(0,0)\}$ alkukuvaa:
$\Phi(t, (x,y)) = (0,0) \iff x+t = 0$ ja $y = 0$
Siis esim. $(n, (-n, 0)) \in \Phi^{-1}\{(0,0)\}\ \forall n$, joten $\Phi^{-1}\{(0,0)\}$
ei ole rajoitettu, eli ei kompakti.
Siis Φ ei ole vahva kuvaus.

Esim. 2) $\Phi : G \times G \to G$ (G mikä tahansa epäkompakti, lok. komp. ryhmä)

$$(\bar{g}, g) \mapsto \bar{g}g$$

Toiminta on vahva (Harj. 7 / Teht. 2 a)).
Nyt $\Phi(\bar{g}, g) = e \iff \bar{g}g = e \iff \bar{g} = g^{-1}$,
joten $\Phi^{-1}(\{e\}) = \{(g^{-1}, g) \mid g \in G\}$.
Jos tämä olisi kompakti, olisi myös $pr_2\, \Phi^{-1}(\{e\})$ kompakti,
mutta tämä on koko G, joka ei ole kompakti.
Siis Φ ei ole vahva kuvaus.

Näiden esimerkkien valossa ehto B on niin tiukka, että juuri mikään toiminta ei toteuta sitä. Siksi ehto B ei ole käyttökelpoinen.

3. Jos U tai $V = \emptyset$, niin $G(U|V) = \emptyset \overset{\circ}{\subset} G$. Ol. $U, V \neq \emptyset$.

Tark. ensin joukkoja $G(U|\{x\})$, missä $x \in V$, ja funktiota $f_x : G \to X$, $g \mapsto gx$.

Nyt $g \in G(U|\{x\}) \Leftrightarrow gx \in U \Leftrightarrow g \in f_x^{-1}(U) \overset{\circ}{\subset} G$.

Nyt
$$G(U|V) = \bigcup_{x \in V} \underbrace{G(U|\{x\})}_{\overset{\circ}{\subset} G} \overset{\circ}{\subset} G .$$
□

4. "$\Rightarrow$" olk. $x \in X$ ja olk. U sellainen x:n ympäristö, että $\overline{G(U|U)}$ on kompakti. Määr. $V = GU$, joka on x:n G-invariantti ympäristö, $\overset{\circ}{\subset} X$ $\left(GU = \bigcup_{g \in G} gU \overset{\circ}{\subset} X\right)$

Jos $v, v' \in V$, niin $\exists\, g, g' \in G$ s.e. $v \in gU$, $v' \in g'U$.

gU ja $g'U$ ovat pisteiden v, v' ympäristöjä.

Lisäksi $G(gU|g'U) \overset{3.4.}{=} g\, G(U|U)(g')^{-1}$, jonka sulkeuma on kompakti, koska $\overline{G(U|U)}$ on kompakti ja $g\cdot$ sekä $\cdot(g')^{-1}$ ovat homeomorfismeja.

Siis toiminta V:ssä on vahva.

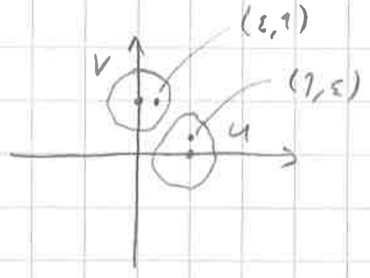
"$\Leftarrow$" olk. $x \in X$ ja U pisteen x G-inv. ympäristö s.e. toiminnan rajoittuma U:hun on vahva.

Siis pisteellä x on ympäristöt V, V' U:ssa s.e. $\overline{G(V|V')}$ on kompakti. Merk. $W = V \cap V' \overset{\circ}{\subset} U \overset{\circ}{\subset} X$, W on x:n ympäristö X:ssä.

Selvästi $\overline{G(W|W)} \subset \overline{G(V|V')}$ eli $\overline{G(W|W)}$ on kompakti.

Siis toiminta on Cartan.

□



5. a) olk. U ja V mielivaltaiset pisteiden $(1,0)$ ja $(0,1)$ ympäristöt.

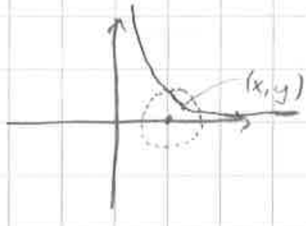
Val. $\varepsilon > 0$ s.e. jana $\{1\} \times [0, \varepsilon] \subset U$ ja jana $[0, \varepsilon] \times \{1\} \subset V$.

Pisteet $(\varepsilon, 1)$ ja $(1, \varepsilon)$ ovat samassa radassa:
$$t(\varepsilon, 1) = (1, \varepsilon) \Leftrightarrow (e^t \varepsilon, e^{-t}) = (1, \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow e^t \varepsilon = 1 \text{ ja } e^{-t} = \varepsilon \Leftrightarrow e^t \varepsilon = 1 \Leftrightarrow t = \ln \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} \infty ,$$
Siis
$$G(U|V) \supset [\ln \tfrac{1}{\varepsilon}, \infty[,$$ eli $\overline{G(U|V)}$ ei ole kompakti.

Siis toiminta ei ole vahva $\underset{3.25}{\Rightarrow}$ se ei ole vahva.

(Tai: käyttämällä suoraan vahvan toiminnan määritelmää:
val. $A = \{1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\}$, joka on kompakti,
mutta $G(A|A) = [0, \infty[$ ei ole kompakti)

b) Olk. $U = B\left((1,0), \frac{1}{2}\right)$.



olk. $(x,y) \in U$.
Koska $x < \frac{3}{2}$, niin
$t \cdot (x,y) \notin U$ ainakin sellaisilla t:n arvoilla,
joilla $e^t \cdot \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ $\left(\Leftrightarrow e^t < \frac{1}{3} \Leftrightarrow t < \ln \frac{1}{3}\right)$.
Koska $x > \frac{1}{2}$, niin
$t \cdot (x,y) \notin U$ ainakin sellaisilla t:n arvoilla,
joilla $e^t \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$ $\left(\Leftrightarrow e^t > 3 \Leftrightarrow t > \ln 3\right)$.

Siis $G(U|U) \subset \left]\ln \frac{1}{3}, \ln 3\right[$ eli $\overline{G(U|U)}$ on kompakti. □

6. a) Jos $g \in G(A|B)$, niin $\exists\, a \in A,\ b \in B$ s.e. $a = gb$.
Silloin $f(a) = f(gb) \underset{\uparrow \text{ f G-kuvaus}}{=} g f(b)$, joten $g \in G(f(A)|f(B))$

Siis $G(A|B) \subset G(fA|fB)$ aina.

"$\supset$" ei aina päde, esim. $G = X = \mathbb{R}$, toiminta translaatiolla;
$Y = \{y_0\}$ yhden alkion joukko, triviaali toiminta; f vakiokuvaus.
Tällöin $G(\{0\}|\{0\}) = \{0\}$, mutta $G(f\{0\}|f\{0\}) = \mathbb{R}$.

b) Jos $g \in G(f^{-1}C | f^{-1}D)$, niin $\exists\, a \in f^{-1}C,\ b \in f^{-1}D$ s.e. $gb = a$.
Silloin $f(a) \in C$, $f(b) \in D$ ja $g f(b) = f(gb) = f(a)$.
Siis $g \in G(C|D)$.
Siis $G(f^{-1}C | f^{-1}D) \subset G(C|D)$ aina.

Selvästi $\supset$ ei aina päde, jos esim. $f^{-1}C = f^{-1}D = \emptyset$:

$G = X = \mathbb{R}$, $\qquad Y = \mathbb{R}^2$

toiminta $(t, x) \mapsto (x + t)$ $\qquad$ toiminta $(t, (x,y)) \mapsto (x+t, y)$

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto (x, 0)$$

Jos val. $C = D = \mathbb{R} \times]0, \infty[$, on $G(C|D) = \mathbb{R}$,
mutta $f^{-1}C = f^{-1}D = \emptyset$, jolloin $G(f^{-1}C | f^{-1}D) = \emptyset$.

□

7. (a) - (c) suoraan Riemannin integraalin vastaavista ominaisuuksista

(d) $I(\underline{1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$.

(e) olk. $h = e^{it_0} \in S^1 \quad (0 < t_0 < 2\pi)$

Nyt

$$I(R_h f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it} \cdot e^{it_0}) \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i(t+t_0)}) \, dt \qquad (\text{muuttujanvaihto } t+t_0 \mapsto u)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{2\pi + t_0} f(e^{iu}) \, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{t_0}^{2\pi} f(e^{iu}) \, du + \int_{2\pi}^{2\pi + t_0} f(e^{iu}) \, du \right)$$

jaksollisuus, jakso 2π

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{t_0}^{2\pi} f(e^{iu}) \, du + \int_0^{t_0} f(e^{iu}) \, du \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{iu}) \, du = I(f).$$

Koska S^1 on Abelin ryhmä, on $R_h f = L_h f$.

$\square$