

Transformaatio ryhmät

Harj. 7 (3.11.2016)

- Kts. Esim. 3.1, luentojen s. 52,
 Osoita, että kohdan 1) toiminta on vahva, mutta kohdan 2) ei ole.
- Olk. G lokaalisti kompakti top. ryhmä,
 a) Osoita, että G in toiminta itsellään (kertolaskulla) on vahva;

$$\mathbb{F}: G \times G \rightarrow G$$

$$(g, g') \mapsto gg'$$
 b) Yleisemmin: Toiminta $G \times G/H \rightarrow G/H$ (H G in suljettu aliryhmä)

$$(g, gH) \mapsto ggH$$
 on vahva $\Leftrightarrow H$ on G in kompakti aliryhmä.
- (Lemma 3.9) Olk. $A \subset \mathbb{X}$ ja $B \subset Y$ kompakteja (\mathbb{X}, Y topologisia avaruuksia)
 ja olkoon W joukon $A \times B$ ympäristö $(\mathbb{X} \times Y)$:ssä. Tällöin on olemassa
 avoimet joukot $U \supset A$ ja $V \supset B$, joille $U \times V \subset W$.
- Määritelmiä: olk. \mathbb{X}, Y Hausdorffin avaruuksia. Sanomme, että jatkuva
 kuvaus $f: \mathbb{X} \rightarrow Y$ on vahva (engl. proper), jos $f^{-1}B$ on kompakti
 jollaisella Y in kompaktilla osajoukolla B . (Väisälä käyttää suomennosta "ankara")
 Osoita Lemma 3.14:
 (i) Yhdistetty kuvaus vahvoista kuvauksista on vahva,
 (ii) olk. \mathbb{X}, Y, Z Hausdorffin avaruuksia, $f: \mathbb{X} \rightarrow Y$ ja $h: Y \rightarrow Z$ jatk.
 kuvauksia, joille $h \circ f: \mathbb{X} \rightarrow Z$ on vahva.
 Tällöin 1) $f: \mathbb{X} \rightarrow Y$ on vahva
 2) jos f on surjektio, niin h on vahva.
- (Lemma 3.15) Olk. $f: \mathbb{X} \rightarrow Y$ vahva kuvaus, \mathbb{X}, Y Hausdorffin avaruuksia
 ja Y lokaalisti kompakti. Tällöin f on suljettu kuvaus.
- Jatkoa viime viikon tehtäviin 5 ja 6.
 Sanomme, että topologisella ryhmällä G on pieniä aliryhmiä,
 jos jokainen neutraalialkion ympäristö sisältää jonkin
 epätriviaalin (eli $\neq \{e\}$) aliryhmän.
 a) Oukoo ryhmillä $(\mathbb{R}, +)$ ja (\mathbb{C}, \cdot) pieniä aliryhmiä?
 b) Osoita, että ryhmällä $G = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ on pieniä aliryhmiä.