Transf. ryhmät
Harj. 7
Ratkaisuja.

1. a) Olk. $A \subset \mathbb{R}^2$, A kompakti. A on rajoitettu, joten se sisältyy johonkin muotoa $B = [-b, b] \times \mathbb{R}$ olevaan joukkoon.
Nyt $G_{[B]} = [-2b, 2b]$ ja $G_{[A]} \subset G_{[B]}$, koska $A \subset B$.
Siis $G_{[A]}$ on rajoitettu. Lemman 3.11 nojalla $G_{[A]}$ on suljettu, joten se on kompakti. Siis toiminta on vahva.

b) Esim. jos $A = \{1\}$, niin $G_{[A]} = \{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ei ole rajoitettu, eli ei kompakti. Siis toiminta ei ole vahva. $\square$

2. a) Ol. $A \subset G$ on kompakti.
Nyt $g \in G_{[A]} \Leftrightarrow gA \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, a_1, a_2 \in A$ s.e. $ga_1 = a_2$
$\Leftrightarrow \exists\, a_1, a_2 \in A$ s.e. $g = a_2 a_1^{-1} \Leftrightarrow g \in AA^{-1}$.
Nyt AA^{-1} on kompaktin joukon $A \times A$ kuva jatkuvassa kuvauksessa $G \times G \xrightarrow[id \times 2]{} G \times G \xrightarrow[\mu]{} G$, siis $G_{[A]} = AA^{-1}$ on kompakti.

b) "$\Leftarrow$" ol. H G:n kompakti aliryhmä. Vastaavasti kuten Teoreeman 2.13 kohdassa 3) voidaan osoittaa, että $\pi : G \to G/H$ on vahva kuvaus.

Olk. $A \subset G/H$ kompakti. Tällöin $\pi^{-1}A \overset{\text{merk.}}{=} B$ on G:n kompakti osajoukko.
Jos $g \in G_{[A]}$, on siis $gA \cap A \neq \emptyset$ eli $\exists\, g_1H, g_2H \in A$ s.e.
$$gg_1H = g_2H,$$
eli $gg_1 = g_2h$ jollakin $h \in H$. Nyt siis $g_1, g_2 \in \pi^{-1}A = B$.
Siis
$$g = g_2 h g_1^{-1} \in BHB^{-1},$$
joka (kuten a)-kohdassa) voidaan esittää kompaktin joukon kuvana, eli BHB^{-1} on kompakti.
Lemman 3.11 nojalla $G_{[A]}$ on suljettu, joten se on kompaktin joukon BHB^{-1} suljettuna osajoukkona kompakti. Siis toiminta on vahva.

"$\Rightarrow$" ol. H epäkompakti. Nyt $A = \{eH\} \subset G/H$ on kompakti ja $gA \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow g(eH) = eH \Leftrightarrow gH = eH \Leftrightarrow g \in H$.
Siis $G_{[A]} = H$ on epäkompakti eli toiminta ei ole vahva. $\square$

3. Ol. ensin, että B on yksiö $\{b\}$. Valitaan jokaisella $a \in A$ avoin ymp. $U_a \times V_a$, jolle $U_a \times V_a \subset W$. Nyt $\{U_a \times V_a \mid a \in A\}$ on avaruuden $A \times B$ avoin peite, ja sillä on äärellinen osapeite $\{U_{a_i} \times V_{a_i}\}_{i=1}^n$. Olk.

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \quad \text{ja} \quad V = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i},$$

jolloin $U \times V$ on vaadittu ympäristö:

- $U \times V \in \mathfrak{X} \times Y$, koska $U \in \mathfrak{X}$ ja $V \in Y$ (leikkaus on äärellinen!)
- $A \times B \subset U \times V$: jos $(a,b) \in A \times B$, on $(a,b) \in U_{a_{i_0}} \times V_{a_{i_0}}$ jollakin $i_0 \in \{1,\dots,n\}$. Siis $a \in U_{a_{i_0}} \subset U$ ja toisaalta (koska $B = \{b\}$), niin $b \in V_{a_i}$ $\forall i$. Siis $b \in V$ ja $(a,b) \in U \times V$.
- $U \times V \subset W$: Jos $(u,v) \in U \times V$, niin $u \in U_{a_{i_0}}$ jollakin i_0. Nyt myös $v \in V_{a_{i_0}}$, joten $(u,v) \in U_{a_{i_0}} \times V_{a_{i_0}} \subset W$.

Yleinen tapaus: edellä osoitetun nojalla voidaan jokaisella $b \in B$ valita avoimet U_b, V_b s.e. $A \times \{b\} \subset U_b \times V_b \subset W$. Nyt $\{U_b \times V_b \mid b \in B\}$ on avaruuden $A \times B$ avoin peite, ja sillä on äärellinen osapeite $\{U_{b_i} \times V_{b_i}\}_{i=1}^m$. Olk.

$$U = \bigcap_{i=1}^m U_{b_i} \quad \text{ja} \quad V = \bigcup_{i=1}^m V_{b_i},$$

jolloin $U \times V$ on vaadittu ympäristö:

- $U \times V$ avoin, ok.
- $A \times B \subset U \times V$: jos $(a,b) \in A \times B$, on $(a,b) \in U_{b_{i_0}} \times V_{b_{i_0}}$ jollakin $i_0 \in \{1,\dots,m\}$. Tällöin $b \in V$. Koska $\forall i: U_{b_i} \times V_{b_i} \supset A \times \{b_i\}$, on välttämättä $a \in U_{b_i}$ $\forall i$, eli $a \in U$. Siis $(a,b) \in U \times V$.
- $U \times V \subset W$: Jos $(u,v) \in U \times V$, niin $v \in V_{b_{i_0}}$ jollakin i_0. Nyt myös $u \in U_{b_{i_0}}$, joten $(u,v) \in U_{b_{i_0}} \times V_{b_{i_0}} \subset W$. $\square$

4. (i) olk. $f: \mathfrak{X} \to Y$, $h: Y \to Z$ vahvoja kuvauksia.
olk. $C \subset Z$ kompakti.
Nyt $h^{-1}(Z) \subset Y$ on kompakti, koska h on vahva, ja siten $f^{-1}(h^{-1}(Z)) \subset \mathfrak{X}$ on kompakti, koska f on vahva.
$= (h \circ f)^{-1}(Z)$. Siis $h \circ f$ on vahva kuvaus.

(ii) 1) olk. $C \subset Y$ kompakti. Tällöin hC on kompakti, ja koska $h \circ f$ on vahva, on $f^{-1}h^{-1}hC$ kompakti.
Koska C on suljettu ja f jatkuva, on $f^{-1}C$ suljettu.
Koska aina $C \subset h^{-1}hC$, on $f^{-1}C \subset f^{-1}h^{-1}hC$.
Siis $f^{-1}C$ on kompaktin joukon $f^{-1}h^{-1}hC$ suljettu osajoukko, eli itsekin kompakti.

2) Olk. $C \subset Z$ kompakti. Tällöin $f^{-1}h^{-1}C$ on kompakti ja siis $ff^{-1}h^{-1}C$ on kompakti. Koska f on surjektio, niin $h^{-1}C = ff^{-1}h^{-1}C$, eli $h^{-1}C$ on kompakti.

$\square$

5. Antiteesi: f ei ole suljettu, joten on ol. $A \subset X$, jolle $fA \subset Y$ ei ole suljettu. Siis $\exists\ y \in \overline{fA} \setminus fA$.
Koska Y on lok. kompakti, on olemassa y:n ympäristö V, jolle $\overline{V}$ on kompakti.
Nyt $y \notin fA \cap \overline{V}$, mutta $y \in \overline{fA \cap \overline{V}}$:

olk. U pisteen y ympäristö. Tällöin $U \cap V$ on y:n ymp., ja siis $fA \cap (U \cap V) \neq \emptyset$, koska $y \in \overline{fA}$. Siis y:n jokainen ympäristö U sisältää joukon $fA \cap V$ pisteitä, joten $y \in \overline{fA \cap V} \subset \overline{fA \cap \overline{V}}$.

Koska $\overline{V}$ on kompakti, on $f^{-1}\overline{V}$ kompakti, koska f on vahva.
Koska A on suljettu, on $A \cap f^{-1}\overline{V}$ kompakti, joten myös $f(A \cap f^{-1}\overline{V})$ on kompakti. Mutta $f(A \cap f^{-1}\overline{V}) = fA \cap \overline{V}$:

"$\subset$" jos $y \in f(A \cap f^{-1}\overline{V})$, niin $y \in fA$. Lisäksi $y \in ff^{-1}\overline{V} \subset \overline{V}$, joten $y \in fA \cap \overline{V}$.

"$\supset$" jos $y \in fA \cap \overline{V}$, val. $x \in A$ s.e. $y = f(x)$. Koska $y \in \overline{V}$, niin $x \in f^{-1}\overline{V}$, eli $x \in A \cap f^{-1}\overline{V}$. Siis $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}\overline{V})$.

Siis $fA \cap \overline{V}$ on kompakti (kompaktin joukon $A \cap f^{-1}\overline{V}$ kuvana), ja siis suljettu. RR sen kanssa, että $y \notin fA \cap \overline{V}$, mutta $y \in \overline{fA \cap \overline{V}}$.

$\square$

6. a) • $(\mathbb{R}, +)$. Os., että 0:n ympäristö $(-1,1)$ ei sisällä epätriviaalia aliryhmää. Jos H olisi epätriv. aliryhmä $\subset (-1,1)$, voitaisiin valita $x \neq 0$, $x \in H$. Jos $n \in \mathbb{N}$ on sellainen, että $n > \frac{1}{|x|}$, niin $\underbrace{x + \dots + x}_{n \text{ kpl}} = nx \notin (-1,1)$, RR koska $nx \in H \subset (-1,1)$.

Siis: ei pieniä aliryhmiä.

• $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Os., että 1:n ympäristö $B(1, \frac{1}{2})$ ei sisällä epätriv. aliryhmää. Jos H olisi tällainen, val. $y \neq 1$, $y \in H$.

1) Jos $|y| \neq 1$, niin joko $|y^n| \to \infty$ tai $|y^n| \to 0$, kun $n \to \infty$. Siis ei voi olla $y^n \in H\ \forall n$.

2) Jos $|y| = 1$, niin y virittää S^1:n aliryhmän $\langle y \rangle \subset H$. Jos $\langle y \rangle$ on ääretön, se on tiheä S^1:ssä, eli $\not\subset B(1, \frac{1}{2})$. Jos taas äärellinen, niin $\langle y \rangle$:n alkiot sijaitsevat tasaisesti S^1:n kehällä ja välttämättä jokin niistä on vasemmassa puolitasossa, eli $\not\subset B(1, \frac{1}{2})$.

Siis: ei pieniä aliryhmiä.

b) $G = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$.

Olk. U mieliv. neutraalialkion $(0,0,\dots)$ kantaympäristö.
Nyt U on välttämättä muotoa

$$U = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i \quad , \quad \text{missä} \quad U_i = \begin{cases} \{0\}, & \text{äärell. monella } i \\ \mathbb{Z}_2, & \text{muilla } i\text{:n arvoilla.} \end{cases}$$

Selvästi U itse on aliryhmä.
Jokainen neutraalialkion ympäristö sisältää kantaympäristön,
mikä todistaa väitteen.