Transformaatioryhmät
Harj. 6 (20.10.2016)

1. a) Osoita, että ekvivariantti kuvaus $f : X \to Y$ kahden G-avaruuden välillä indusoi (rajoittumana) kuvauksen $f^H : X^H \to Y^H$ kaikilla G:n aliryhmillä H.

b) Osoita, että ekvivariantti kuvaus $f : X \to Y$ kahden G-avaruuden välillä indusoi jatkuvan kuvauksen $\hat{f} : X/G \to Y/G$ rata-avaruuksien välille s.e. kaavio

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X/G & \xrightarrow{\hat{f}} & Y/G \end{array}$$

kommutoi.

2. a) Osoita, että G-homeomorfismi $f : X \to Y$ indusoi homeomorfismin $f^H : X^H \to Y^H$ (jokaisella G:n aliryhmällä H).

b) Osoita, että G-homeomorfismi $f : X \to Y$ indusoi homeomorfismin $\hat{f} : X/G \to Y/G$.

3. Anna esimerkki G-avaruuksista X ja Y, jotka ovat homeomorfiset mutta eivät G-homeomorfiset keskenään.

4. Jos A on G-avaruuden X G-invariantti osajoukko, niin myös A itse on G-avaruus. Tällöin ratojen joukolle A/G voidaan antaa kaksi topologiaa: relatiivitopologia avaruudesta X/G sekä tekijätopologia projektion $A \to A/G$ avulla. Osoita, että nämä topologiat ovat samat.

5. Olk. $G = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ (numeroituva tulo avaruuksista $\mathbb{Z}_2$, missä $\mathbb{Z}_2$:lla on diskreetti topologia). Annetaan G:lle tulotopologia. Osoita, että G on kompakti, täysin epäyhtenäinen ja Hausdorff. Osoita, että G:n topologia ei ole diskreetti. (Kirjan Väisälä: Topologia II tietoja saa käyttää)

6. Jatkoa tehtävään 5. Määritellään G:ssä laskutoimitus koordinaateittain ($\mathbb{Z}_2$ = kahden alkion ryhmä). Osoita, että G on topologinen ryhmä.

7. Täytä kurssipalautelomake laitoksen nettisivuilla keskiviikkoon 19.10. mennessä.