Transformaatioryhmät
Harj. 6
Ratkaisuja.

1. a) Jos $x \in X^H$, on siis $hx = x$ $\forall h \in H$ ja myös
$hf(x) = f(hx) = f(x)$, $\forall h \in H$, joten $f(x) \in Y^H$.
Siis $f(X^H) \subset Y^H$ ja void. määritellä $f^H : X^H \to Y^H$.
Jatkuvan kuvauksen f rajoittumana f^H on jatkuva. □

b)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/G \arrow[r, "\hat{f}"] & Y/G \end{tikzcd}$$

Jos $Gx \in X/G$, määritellään $\hat{f}(Gx) = Gf(x) \in Y/G$.
$\hat{f}$ hyvin määritelty: jos $Gx = Gx'$, niin
$\exists g \in G$ s.e. $x' = gx$. Tällöin
$$f(x') = f(gx) = gf(x),$$
eli $f(x')$ ja $f(x)$ kuuluvat samaan rataan Y:ssä.
Siis $Gf(x) = Gf(x')$ ja $\hat{f}$ on hyvin määritelty.

Kaavio kommutoi:
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(x) \arrow[d, mapsto] \\ Gx \arrow[r, mapsto] & Gf(x) \end{tikzcd}$$

Kuvauksen $\hat{f}$ jatkuvuus seuraa taas Lemmasta 1.18, koska $\pi_Y \circ f$ on
jatkuva ja π_X on tekijäkuvaus.
□

2. a) Ed. tehtävän nojalla f indusoi $f^H : X^H \to Y^H$. Koska $f^{-1} : Y \to X$ on
jatkuva G-kuvaus (kts. Lemma 2.27), se indusoi $(f^{-1})^H : Y^H \to X^H$.
Koska f^H on f:in rajoittuma ja $(f^{-1})^H$ on f^{-1}:n rajoittuma, ovat
f^H ja $(f^{-1})^H$ toistensa käänteiskuvauksia. Molemmat ovat jatkuvia, joten
f^H on homeomorfismi.

b) Nyt f indusoi jatkuvan kuvauksen $\hat{f} : X/G \to Y/G$ ja $f^{-1} : Y \to X$ indusoi
jatkuvan kuvauksen $\widehat{f^{-1}} : Y/G \to X/G$, $Gy \mapsto Gf^{-1}(y)$.
Nyt $\widehat{f^{-1}}(\hat{f}(Gx)) = \widehat{f^{-1}}(Gf(x)) = Gf^{-1}(f(x)) = Gx$, eli $\widehat{f^{-1}} \circ \hat{f} = id_{X/G}$.
Vastaavasti $\hat{f} \circ \widehat{f^{-1}} = id_{Y/G}$, joten ne ovat toistensa käänteiskuvauksia
ja siis $\hat{f}$ on homeomorfismi.
□

3. Esim. $G = (\mathbb{R}, +)$, $X = Y = \mathbb{R}$; toiminnat $G \times X \to X$, $tx = x + t$
ja $G \times Y \to Y$, $ty = y$. Tietysti $X \approx Y$.
Kiintopistejoukot: $X^G = \emptyset$, $Y^G = Y$, joten $X^G \not\approx Y^G$, joten
2a) $\Rightarrow$ X ja Y eivät G-homeomorfiset. II tapa: Rata-avaruudet:
X/G on yksiö, $Y/G \approx Y$, joten $X/G \not\approx Y/G$ ja 2b) $\Rightarrow$ X ja Y eivät G-homeom. □

4. Merkitään τ = tekijätopologia ja τ' = relatiivitopologia.

(1) $\tau' \subset \tau$:

Tehtävän 1 b) nojalla inkluusio $i : A \hookrightarrow \bar{X}$ indusoi jatkuvan funktion

$$\hat{i} : (A/G, \tau) \to \bar{X}/G ,$$
$$\alpha \longmapsto \alpha .$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi_A"'] & \bar{X} \arrow[d, "\pi_{\bar{X}}"] \\ A/G \arrow[r, dashed, "\hat{i}"] & \bar{X}/G \end{tikzcd}$$

Rajoittamalla maalijoukkoa saadaan jatkuva funktio $(A/G, \tau) \to (A/G, \tau')$, $\alpha \mapsto \alpha$, mistä seuraa $\tau' \subset \tau$. $\square$ (1)

(2) $\tau \subset \tau'$: olk. $U \subset A/G$, $U \in \tau$. Siis $V = \pi_A^{-1} U \circledcirc A$, ja siis $V = V' \cap A$ jollakin $V' \circledcirc \bar{X}$. Koska $\pi_{\bar{X}}$ on avoin kuvaus, on $\pi_{\bar{X}} V' \circledcirc \bar{X}/G$.

Nyt riittää os., että $\pi_{\bar{X}} V' \cap A/G = U$ (jolloin siis U on avoin relatiivitopologiassa eli $U \in \tau'$):

"$\subset$" ol. $\alpha \in \pi_{\bar{X}} V' \cap A/G$. Val. $x \in V'$ s.e. $\pi_{\bar{X}}(x) = \alpha$. Koska $\alpha \in A/G$ ja A on G-invariantti, on välttämättä $x \in A$. Siis $x \in V' \cap A = V = \pi_A^{-1}(U)$, joten $\alpha = \pi_{\bar{X}}(x) = \pi_A(x) \in U$.

"$\supset$" ol. $\alpha \in U$. Koska $U \subset A/G$, on $\alpha \in A/G$. Jos $x \in A$ on s.e. $\pi_{\bar{X}}(x) = \pi_A(x) = \alpha$, on siis $x \in \pi_A^{-1} U = V \subset V'$ ja $\alpha \in \pi_{\bar{X}} V'$. Siis $\alpha \in \pi_{\bar{X}} V' \cap A/G$. $\square$ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow$ $\tau = \tau'$.

$\square$

5. G on kompakti Hausdorff kompaktien Hausdorff-avaruuksien tulona.

G on täysin epäyhtenäinen:

olk. $x, y \in G$, $x \neq y$. Osoitetaan, että x ja y kuuluvat eri komponentteihin, mistä väite seuraa.

Olk. $i \in \mathbb{N}$ s.e. $x_i \neq y_i$. Void. ol. $x_i = 0$, $y_i = 1$.

Muodostetaan avoin joukko $U_i = \prod_{\mathbb{N}} A_n$, missä $A_n = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n \neq i \\ \{0\}, & n = i. \end{cases}$

Vastaavasti $V_i = \prod_{\mathbb{N}} A_n$, $A_n = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n \neq i \\ \{1\}, & n = i. \end{cases}$

Nyt $U_i, V_i \circledcirc G$, $U_i \cup V_i = G$, $U_i \cap V_i = \emptyset$, $x \in U_i$ ja $y \in V_i$.

Siis x ja y kuuluvat eri komponentteihin.

G ei diskreetti:

Selvästi G on joukkona ääretön. Koska ääretön diskreetti avaruus ei voi olla kompakti (G on kompakti!), ei G siten voi olla diskreetti.

$\square$

6\. • G on T_1, koska se on Hausdorff.

• $\mu : G \times G \to G$ jatkuva:

Muotoa U_i, V_i, $i \in \mathbb{N}$ (kts. teht. 5) olevat joukot muodostavat G:n topologian esikannan. Riittää siis osoittaa ([Top. II, Lause 3.3]), että $\mu^{-1}(U_i)$, $\mu^{-1}(V_i)$ ovat avoimia $G \times G$:ssä.

Huomataan, että $(x,y) = ((x_j)_{j\in\mathbb{N}}, (y_j)_{j\in\mathbb{N}}) \in \mu^{-1}(U_i)$

$\iff x_i + y_i = 0$

$\iff x_i = y_i = 0$ tai $x_i = y_i = 1$

(muut koordinaatit voivat olla mitä tahansa).

Siis $\mu^{-1}(U_i) = (U_i \times U_i) \cup (V_i \times V_i) \circledcirc G \times G$.

Vastaavasti $\mu^{-1}(V_i) = (U_i \times V_i) \cup (V_i \times U_i) \circledcirc G \times G$.

• Selvästi G on ryhmä;

$(0,0,\ldots)$ on neutraalialkio,

jokainen alkio on itsensä käänteisalkio,

laskutoimitus on liitännäinen $((a+(b+c))_i = ((a+b)+c)_i \ \forall i \in \mathbb{N})$.

• $\iota : G \to G$ on jatkuva, koska se on identtinen kuvaus.

$\square$