

Transformaattoryhmitt

Harj. 5 (13.10.2016)

1. Osoita Lemma 2.21.

2. Olk. X topologinen avaruus ja $\Delta = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$.
Osoita: X on Hausdorff $\Leftrightarrow \Delta \in X \times X$.

3. Olk. H topol. ryhmän G suljettu aliryhmä.
Osoita, että $N(H)$ on G in suljettu aliryhmä.

4. Tarkastellaan taas ryhmän $GL(n, \mathbb{R})$ luonn. toimintaa \mathbb{R}^n :ssä.
Olk. $H \leq GL(n, \mathbb{R})$. Osoita, että kiintopistejoukko $(\mathbb{R}^n)^H$ on vektorialiavaruus.

5. Anna esimerkki epäkompaktista ryhmästä, jolle Lemman 2.18. väite ei päde.

6. Anna esimerkki kiintopistejoukosta X^H , joka ei ole G -invariantti (tässä siis X on G -avaruus, $H \leq G$).

7. Osoita, että $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0 \right\}$
on ryhmän $GL(2, \mathbb{R})$ aliryhmä.
Osoita, että

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

on G in suljettu aliryhmä.

Osoita, että Lemman 2.19. väite ei päde aliryhmälle $H \leq G$ ja alkioille

$$g_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

8. Seuraavassa G ja G' ovat ryhmiä, $H \leq G$ ja $H' \leq G'$ normaaleja aliryhmiä.

a) Osoita: jos on olemassa ryhmäisomorfismi $f: G \rightarrow G'$, jolle $f(H) = H'$, niin tekijäryhmät G/H ja G'/H' ovat isomorfiset.

b) Anna esimerkki tilanteesta, jossa $G \cong G'$ ja $H \cong H'$, mutta tekijäryhmät eivät ole isomorfiset.

$$G/H \text{ ja } G'/H'$$