Transf.ryhmät
Harj. 5
Ratkaisuja

1. "$\subset$" ol. $\bar{g} \in G_{gx}$
v. $\bar{g} \in gG_xg^{-1}$ eli $g^{-1}\bar{g}g \in G_x$.
t. $g^{-1}\bar{g}gx = g^{-1}(\underbrace{\bar{g}gx}_{=gx,\ \text{koska}\ \bar{g} \in G_{gx}}) = g^{-1}gx = x$ eli $g^{-1}\bar{g}g \in G_x$.

"$\supset$" ol. $\bar{g} \in gG_xg^{-1}$ eli $\bar{g} = gg'g^{-1}$ jollakin $g' \in G_x$.
v. $\bar{g} \in G_{gx}$
t. $\bar{g}(gx) = (gg'g^{-1})(gx) = g\underbrace{g'x}_{=x,\ \text{koska}\ g' \in G_x} = gx$ eli $\bar{g} \in G_{gx}$.

$\square$

2. Hyödyllinen havainto: jos $x,y \in X$ ja U,V ovat pisteiden x,y ympäristöjä, niin
(*) $U \cap V = \emptyset \iff U \times V$ ei sisällä muotoa (z,z) olevaa alkiota $\iff (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$.

"$\Rightarrow$" ol. X Hausdorff. olk. $(x,y) \in X \times X$, $(x,y) \notin \Delta$ eli $x \neq y$.
Hausdorff-ehdosta seuraa, että x:llä ja y:llä on erilliset ympäristöt U ja V. Nyt $U \times V$ on (x,y):n ympäristö $X \times X$:ssä ja (*):n nojalla $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$.
Tämä osoittaa, että $(X \times X) \setminus \Delta$ on avoin eli Δ on suljettu.

"$\Leftarrow$" ol. $\Delta \Subset X \times X$. olk. $x,y \in X$, $x \neq y$.
Nyt siis $(x,y) \notin \Delta$, joten $\exists\ W \Subset X \times X$ s.e. $(x,y) \in W \subset (X \times X) \setminus \Delta$ (tässä käytettiin: Δ suljettu).
Koska muotoa $U \times V$ olevat joukot muodostavat tulotopologian kannan, on ol. x:n ymp. U ja y:n ymp. V s.e. $U \times V \subset W$.
Nyt siis $U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$ eli $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$.
(*):n nojalla $U \cap V = \emptyset$ eli löydettiin erilliset ympäristöt.

$\square$

3. $N(H)$ on aliryhmä:
- $e \in N(H)$, koska $eHe^{-1} = H$.
- jos $g_1, g_2 \in N(H)$, on $g_1g_2 \in N(H)$, koska
$$(g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1} = g_1(\underbrace{g_2Hg_2^{-1}}_{=H})g_1^{-1} = g_1Hg_1^{-1} = H.$$
- jos $g \in N(H)$, on $g^{-1} \in N(H)$, koska
$$gHg^{-1} = H \Rightarrow H = g^{-1}Hg \Rightarrow g^{-1}Hg = H \text{ eli } g^{-1} \in N(H).$$

$N(H)$ on suljettu:

olk. $g \in G \setminus N(H)$. Os., että g:llä on ymp. U s.e. $U \subset G \setminus N(H)$.

Jos $g \in G \setminus N(H)$, on kaksi mahdollisuutta: $gHg^{-1} \not\subset H$ tai $H \not\subset gHg^{-1}$.

(i) jos $gHg^{-1} \not\subset H$, on siis $\exists\, h \in H$ s.e. $ghg^{-1} \notin H$.

Tark. jatkuvaa kuvausta $K: G \to G$, $g \mapsto ghg^{-1}$. Oletuksen perusteella $G \setminus H$ on avoin, joten on olemassa pisteen g ymp. U, jolle $K(U) \subset G \setminus H$.

Siis $g'hg'^{-1} \notin H$ $\forall g' \in U$, joten $g' \in G \setminus N(H)$ $\forall g' \in U$, eli $U \subset G \setminus N(H)$.

(ii) jos $H \not\subset gHg^{-1}$, on siis $g^{-1}Hg \not\subset H$, joten soveltamalla (i)-kohtaa alkiolle g^{-1}, löydetään g^{-1}:lle ympäristö $V \subset G \setminus N(H)$.

Nyt $U = V^{-1}$ on g:n ympäristö ja $U \subset G \setminus N(H)$ (koska $V \cap N(H) = \emptyset$ ja $N(H)$ on aliryhmä, on $V^{-1} \cap N(H) = \emptyset$).

(i) & (ii) $\Rightarrow$ $G \setminus N(H)$ avoin $\Rightarrow$ $N(H)$ suljettu.

$\square$

4. Osoitetaan ensin, että $\overline{X}^{\{g\}}$ on vektorialiavaruus $\forall g \in Gl(n, \mathbb{R})$:
(huom. toiminta on lineaarista, eli jokaista g vastaa lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

- jos $\bar{v}, \bar{w} \in \overline{X}^{\{g\}}$, on siis $g\bar{v} = \bar{v}$, $g\bar{w} = \bar{w}$, joten

$$g(\bar{v} + \bar{w}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{toiminta lineaarista}}}{=} g\bar{v} + g\bar{w} = \bar{v} + \bar{w}, \quad \text{eli } \bar{v} + \bar{w} \in \overline{X}^{\{g\}}.$$

- jos $\bar{v} \in \overline{X}^{\{g\}}$ ja $a \in \mathbb{R}$, on

$$g(a\bar{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lineaarisuus}}}{=} a g(\bar{v}) = a\bar{v}, \quad \text{eli } a\bar{v} \in \overline{X}^{\{g\}}.$$

- $\bar{0} \in \overline{X}^{\{g\}}$, koska $g\bar{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lineaarisuus}}}{=} \bar{0}$.

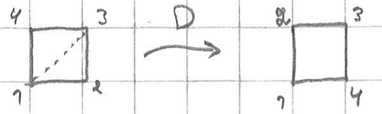
Nyt $\overline{X}^H = \bigcap_{g \in H} \overline{X}^{\{g\}}$ on vektorialiavaruuksien leikkauksena vekt. aliavaruus.

$\square$

5. Esim. $(\mathbb{Z}, +)$ diskreetillä topologialla, $g_0 = 1$.
Nyt $A = \{0, 1, 2, \dots\}$ ja $\bar{A} \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ suljettu } \mathbb{Z}\text{:ssa}}}{=} A$ ei ole $\mathbb{Z}$:n aliryhmä.

$\square$

6. X = neliö, G = neliön symmetriaryhmä D_4,
kts. [Metsänkylä, Näätänen: Algebra, s. 92-94].
olk. D peilaus diagonaalin suhteen:



Nyt $H = \{I, D\}$ on G:n aliryhmä ja
$X^H = \{1, 3\}$, numerot kuten kuvassa.
Selvästi X^H ei ole G-invariantti, esim. kierto R_{90}
kuvaa X^H:n alkiot X^H:n ulkopuolelle.

7. G aliryhmä:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, ok.
- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ (huom. $ac \neq 0$, koska $a \neq 0$, $c \neq 0$)
- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ok.}$$

H aliryhmä:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$
- $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$
- $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, ok.

H suljettu: selvästi jokainen $\bar{0}$:n kuulaympäristö $B(\bar{0}, r)$ sisältää vain äärellisen monta joukon H alkiota. Siis jokaisella $\mathbb{R}^4$:n pisteellä on ympäristö, joka sisältää vain äärellisen monta joukon H alkiota. Tästä seuraa, että H on suljettu $\mathbb{R}^4$:ssä, siis myös G:ssä.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

joten $g_0 H g_0^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} \subsetneq H$. □

Toinen todistus tehtävän 3 väitteelle $N(H)$ suljettu (Jukka Sireni):

Tarkastellaan funktiota $f: G \times G \to G$, $f(g,h) = ghg^{-1}$. Nyt $f(N(H) \times H) = H$,
joten (*) $f(\overline{N(H)} \times H) = f(\overline{N(H)} \times \overline{H}) = f(\overline{N(H) \times H}) \subset \overline{f(N(H) \times H)} = \overline{H} = H$.
Olk. nyt $g \in \overline{N(H)}$. Nyt (*):n nojalla $gHg^{-1} \subset H$.
Koska $\overline{N(H)}$ on ryhmä (Lause 1.12.), on myös $g^{-1} \in \overline{N(H)}$, joten
(*) $\Rightarrow g^{-1}Hg \subset H$, josta seuraa $H \subset gHg^{-1}$.
Nyt siis $gHg^{-1} \subset H$ ja $H \subset gHg^{-1}$ eli $gHg^{-1} = H$ eli $g \in N(H)$.
Siis $\overline{N(H)} = N(H)$ eli $N(H)$ on suljettu. □

8. a) Määritellään

$$\tilde{f} : G/H \to G'/H'$$
$$gH \mapsto f(g)H'.$$

- $\tilde{f}$ on hyvin määr. :

  jos $gH = g'H$ eli $g = g'h$ jollakin $h \in H$,

  niin

  $$\tilde{f}(gH) = f(g)H' = f(g'h)H' = f(g')\underbrace{f(h)}_{\in H'}H' = f(g')H' = \tilde{f}(g'H).$$

- $\tilde{f}$ on injektio :

  jos $\tilde{f}(gH) = \tilde{f}(g'H)$, niin $f(g)H' = f(g')H'$,

  joten $f(g)^{-1}f(g') \in H'$.

  $\qquad\qquad$ " $f(g^{-1}g') \in H'$.

  Koska $f(H) = H'$, niin $\exists\ a \in H$ s.e. $f(a) = f(g^{-1}g')$

  ja koska f on injektio, niin $g^{-1}g' = a \in H$.

  Siis $g^{-1}g' \in H$ eli $gH = g'H$ ja $\tilde{f}$ on injektio.

- $\tilde{f}$ on surjektio, koska f on surjektio.

- $\tilde{f}$ on homomorfismi :

  $$\begin{aligned}\tilde{f}((gH)(g'H)) &= \tilde{f}((gg')H) = f(gg')H' \\ &= f(g)f(g')H' = (f(g)H')(f(g')H') \\ &= \tilde{f}(gH)\,\tilde{f}(g'H).\end{aligned}$$

b) Esim. $G = G' = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 2\mathbb{Z}$, $H' = 3\mathbb{Z}$.