Transf. ryhmät
Harj. 4
Ratkaisuja.

1. Määr. $\varphi : G \times G/H \to G/H$

$$(g, \bar{g}H) \mapsto (g\bar{g})H$$

- $\varphi$ hyvin määritelty: jos $\hat{g}H = \bar{g}H$, on $\hat{g} = \bar{g}h$ jollakin $h \in H$ ja $g\hat{g}H = g\bar{g}hH = g\bar{g}H$.
- $\varphi$ on toiminta:

$$\varphi(e, \bar{g}H) = (e\bar{g})H = \bar{g}H \quad \text{ok.}$$
$$\varphi(g_1, \varphi(g_2, \bar{g}H)) = g_1(g_2\bar{g}H)$$
$$\varphi(g_1g_2, \bar{g}H) = (g_1g_2)\bar{g}H = \{g_1g_2\bar{g}h \mid h \in H\} \quad \text{ok.}$$

- $\varphi$ on jatkuva: Kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\varphi"] & G/H \end{tikzcd},$$

jossa id ja $\pi$ ovat avoimia kuvauksia (Lemma 1.14), joten $\mathrm{id} \times \pi$ on avoin kuvaus (Harj. 2/Teht. 1) ja siis tekijäkuvaus. Koska lisäksi $\pi \circ \mu$ on jatkuva, seuraa $\varphi$:n jatkuvuus Lemmasta 1.18. $\square$

2. - $\mathrm{Ker}(\varphi)$ on normaali aliryhmä (Lause 2.6.), joten $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ on ryhmä. Koska $X$ on $T_1$, on $\mathrm{Ker}(\varphi) \in G$ (Korollaari 2.5.); siis $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ on topologinen ryhmä Teoreeman 1.16 nojalla.
- Os., että $\Phi : G/\mathrm{Ker}(\varphi) \times X \to X$

$$(g\mathrm{Ker}(\varphi), x) \mapsto gx$$

on hyvin määritelty: jos $g\mathrm{Ker}(\varphi) = \bar{g}\mathrm{Ker}(\varphi)$, on $\bar{g} = gh$ jollakin $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, jolloin $\bar{g}x = (gh)x = g\underbrace{(hx)}_{=x,\ \text{koska } h \in \mathrm{Ker}(\varphi)} = gx$, ok.

- $\Phi$ toteuttaa toiminnan ehdot:
  1) $(e\mathrm{Ker}(\varphi), x) \mapsto ex = x$ ok.
  2) $\Phi(g_1\mathrm{Ker}(\varphi), \Phi(g_2\mathrm{Ker}(\varphi), x)) = g_1(g_2x)$
  $\Phi((g_1\mathrm{Ker}(\varphi)) \cdot (g_2\mathrm{Ker}(\varphi)), x) = \Phi((g_1g_2)\mathrm{Ker}(\varphi), x) = (g_1g_2)x$ } samat ok.
- $\Phi$ on jatkuva:
kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi \times \mathrm{id}"'] & X \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ G/\mathrm{Ker}(\varphi) \times X \arrow[r, "\Phi"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g, x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & gx \arrow[d, mapsto] \\ (g\mathrm{Ker}(\varphi), x) \arrow[r, mapsto] & gx \end{tikzcd}.$$

Jatkuvuuden perustelu kuten tehtävässä 1.

- toiminta on tehokas:
  jos $(g\ker(\varphi), x) = x \ \forall x \in X$, on siis $gx = x \ \forall x \in X$, joten $g \in \ker(\varphi)$. Siis $g\ker(\varphi) = e\ker(\varphi)$, eli ryhmän $G/\ker(\varphi)$ neutr. alkio.

$\square$

3. b) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$(t, (x,y)) \mapsto (x+t, y).$$

Selvästi pisteen $(x,y)$ rata $G(x,y) = \mathbb{R} \times \{y\}$ ja funktio
$$f : X/G \to \mathbb{R}$$
$$G(x,y) \mapsto y$$
on bijektio.

Kaaviossa
$$\begin{tikzcd} X = \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\ X/G \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\pi$ on tekijäkuvaus, joten $f$ on jatkuva.

Kaaviossa
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f^{-1}"] & X/G \end{tikzcd}$$

$pr_2$ on avoin kuvaus, joten se on tekijäkuvaus. Siis myös $f^{-1}$ on jatkuva. Siis $f$ on homeomorfismi.

$\square$

a) ei ole, esim. joukko $A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \Subset \mathbb{R}^2$,
joten $G \times A \Subset G \times X$, mutta
$$\varphi(G \times A) = \{(x,y) \mid y > 0\},$$
joka ei ole suljettu $\mathbb{R}^2$:ssa.

4. $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\}$, $S^1 = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$.

Määr. $f : SO(2) \to S^1$
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$f$ voidaan tulkita projektion $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ rajoittumaksi, joten se on jatkuva.
Jos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ on funktio
$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},$$
ja rajoitetaan $g : S^1 \to SO(2)$, niin $g$ on jatkuva ja $g = f^{-1}$.

On vielä osoitettava, että $f$ on homomorfismi:

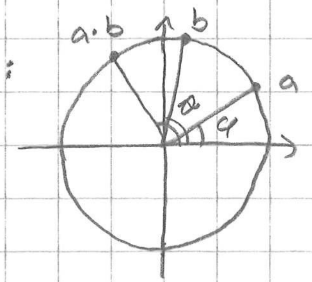
$$f\left(\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta-\sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta-\sin\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= (\cos\varphi\cos\theta-\sin\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\cos\theta)$$

$$= (\cos(\varphi+\theta),\ \sin(\varphi+\theta)) = (\cos\varphi, \sin\varphi)\cdot(\cos\theta, \sin\theta).$$

$\uparrow$

laskutoimitus $S^1$:ssä; tuloon $a\cdot b$ liittyvä kulma on $\varphi+\theta$.




□

5. olk. $n \geq 2$

Toiminta $\varphi: Gl(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(A, \bar{x}) \longmapsto A\bar{x}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Siis $Ae_n = e_n \iff a_{1n} = a_{2n} = \dots a_{(n-1)n} = 0$, $a_{nn} = 1$.

a) Isotropiaryhmään kuuluvat siis sellaiset matriisit $A \in Gl(n,\mathbb{R})$, jotka ovat muotoa $A = \begin{pmatrix} & B & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ * & * & * \cdots * & 1\end{pmatrix}$, $B$ $(n-1)\times(n-1)$-matriisi.

Huom. $\det(A) \overset{(*)}{=} \det(B)$, joten $A\in Gl(n,\mathbb{R}) \iff B \in Gl(n-1,\mathbb{R})$.

Vastaus: matriisit $\underbrace{\begin{pmatrix} & B & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ * & * & \cdots * & 1\end{pmatrix}}$, missä $B\in Gl(n-1,\mathbb{R})$, $*$ = mikä tahansa reaaliluku.

b) Muotoa $\uparrow$ olevat matriisit, missä $B \in Sl(n-1,\mathbb{R})$, $*$ = mikä tahansa reaaliluku.

c) väite: $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$.

tod. Matriisia $A\in Sl(n,\mathbb{R})$ vastaava lineaarikuvaus on bijektio, ja $A(\bar{0}) = \bar{0}$, joten $Ae_n \neq \bar{0}$, eli $\bar{0}\notin \mathrm{im}(f)$.

Olkoon sitten $\bar{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$. On olemassa $\mathbb{R}^n$:n kanta $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ s.e. $\bar{v}_n = \bar{x}$ [Honkasalo: Lin.alg., Seur. 2.5.11, s. 51].

(*) [Honkasalo, Lin.alg., Lause 5.3.2 a)], kehitetty sarakkeen $n$ mukaan.

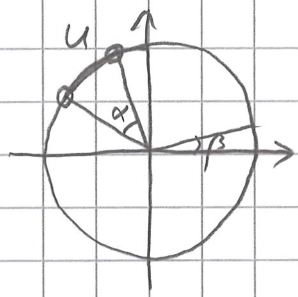
Muodostetaan matriisi $B$, jonka sarakkeet ovat vektorit $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$.
Koska $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on kanta, on $B \in Gl(n, \mathbb{R})$.
Lisäksi $Be_n = \bar{v}_n = \bar{x}$.
Matriisi $A \in Sl(n, \mathbb{R})$, jolle $Ae_n = \bar{x}$, saadaan jakamalla (esim.) $B$:n ensimmäisen sarakkeen luvut luvulla $\det B$,

$$A = \left[ \bar{v}_1/\det B \quad \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n \right].$$

□

6\. a) ol. $\langle e^{i\alpha} \rangle = H$ on ääretön

v. $H$ on tiheä $S^1$:ssä.




tod. Antiteesi: $H$ ei ole tiheä, jolloin $\exists$ avoin joukko $U \subset S^1$, jolle $U \cap H = \emptyset$. Void. ol., että $U$ on "väli", merk. kulmaa $\alpha$:lla. Nyt on olemassa 1:n ympäristö $V$, joka ei sisällä muita $H$:n alkioita kuin 1:n:

jos jokainen 1:n ympäristö sisältäisi muitakin $H$:n alkioita kuin 1:n, vali sellainen $H$:n alkio, jota vastaava kulma $\beta$ on $< \alpha$; tällöin jokin $\beta^n \in U$ ja siis $\beta^n \in U \cap H$, RISTIRIITA.

Nyt ollaan samassa tilanteessa kuin Lemman 2.18 todistuksen (i)-kohdassa, joten $H$ on äärell. syklinen ryhmä (saatiin $B = \bar{B} = \{e, g_0, \dots, g_0^{m-1}\}$); RISTIRIITA, koska $H$ on ääretön. □

b) Ol., että $H \leq S^1$ on suljettu; tarkastellaan joukkoja $K = \{\arg(z) \in [0, 2\pi[ \mid z \in H\}$ ja $K' = K \setminus \{0\}$.

(i) Jos $\inf(K') = 0$ (jolloin jokainen pisteen $1 \in S^1$ ympäristö sisältää muitakin $H$:n alkioita kuin alkion 1), nähdään, että $H$ on tiheä samoin kuin a)-kohdassa. Koska $H$ on suljettu, niin $H = S^1$.

(ii) Jos $\inf(K') = t_0 > 0$, niin $z = e^{it_0} \in H$, koska $H$ on suljettu.
Nyt $\langle z \rangle$ ei voi olla ääretön, koska muuten a)-kohdan nojalla $\langle z \rangle$ olisi tiheä ja olisi $\inf(K') = 0$. Siis $\langle z \rangle = \{1, z, \dots, z^m\}$ on äärellinen.
Riittää siis os., että $H = \langle z \rangle$.
Antiteesi: $\exists\, w \in H$, $w \notin \langle z \rangle$, jolloin $\arg(z^k) < \arg(w) < \arg(z^{k+1})$ jollain $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Tällöin $h = w(z^k)^{-1} \in H$ ja
$0 < \arg(h) = \arg(w) - \arg(z^k) < \arg(z^{k+1}) - \arg(z^k) = \arg(z)$,
mikä on ristiriita, koska $\arg(z)$ on joukon $K'$ pienin luku.
Siis $H = \langle z \rangle$ on äärellinen syklinen ryhmä. □