Transformaatioryhmät

Harj. 3 (29.9.2016)

1. a) Osoita, että $N \rtimes_{\varphi} H$ on topologinen ryhmä (Lause 1.27)

   b) Osoita, että Lauseessa 1.28 määritelty $\tilde{N}$ on ryhmän $N \rtimes H$ normaali aliryhmä.

2. Todista Lause 1.31.

3. Onko eksakti jono $0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{proj} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$ halkeava?
   Voidaanko $\mathbb{Z}$ esittää muodossa $2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$?

4. Osoita, että $Gl(n,\mathbb{R}) \cong Sl(n,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*$ topologisina ryhminä ja $Gl(n,\mathbb{R})/Sl(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$ top. ryhminä.
   Tässä $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$.

5. Tarkastellaan ryhmää $SO(2)$.

   a) Olk. $\varphi \in \mathbb{R}$ ja $P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

   Osoita, että $P \in SO(2)$. Mikä on P:tä vastaavan lineaarikuvauksen geometrinen tulkinta?

   b) Osoita, että jokainen matriisi $P \in SO(2)$ on y.o. muotoa jollakin $\varphi \in \mathbb{R}$.

6. Tarkastellaan ryhmää $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} \subset (\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$.
   Olk. $\alpha \in \mathbb{R}$ jolloin $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \in S^1$.
   Merk. $\langle e^{i\alpha}\rangle$ = alkion $e^{i\alpha}$ virittämä aliryhmä (keksi esimerkkejä!).
   Osoita, että

$$\langle e^{i\alpha}\rangle \text{ on äärellinen} \iff \frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$