Transf. ryhmät
Harj. 3
Ratkaisuja.

1. a) (i) liitännäisyys:

$$((n,h)*(n',h'))*(n'',h'') = (n\varphi^*(h,n'), hh')*(n'',h'')$$
$$= (n\varphi^*(h,n')\varphi^*(hh',n''), hh'h'')$$
$$= (n\varphi^*(h,n')\varphi^*(h,\varphi^*(h',n'')), hh'h'')$$
$$= (n\varphi^*(h, n'\varphi^*(h',n'')), hh'h'') \quad (\text{koska } \varphi^*(h,\cdot) \text{ on homomorfismi } N\to N)$$
$$= (n,h)*(n'\varphi^*(h',n''), h'h'')$$
$$= (n,h)*((n',h')*(n'',h'')).$$

(ii) (e_N, e_H) on neutraalialkio:

$$(e_N,e_H)*(n,h) = (e_N\varphi^*(e_H,n), e_H h) = (e_N \underset{\substack{\uparrow\\ \text{koska } e_H \text{ toimii triviaalisti}}}{n}, e_H h) = (n,h)$$

ja
$$(n,h)*(e_N,e_H) = (n\varphi^*(h,e_N), he_H) = (n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{koska } \varphi^*(h,\cdot) \text{ on homomorfismi}}}{e_N}, he_H) = (n,h).$$

(iii) alkion (n,h) käänteisalkio on $(\varphi^*(h^{-1},n^{-1}), h^{-1})$:

$$(n,h)*(\varphi^*(h^{-1},n^{-1}),h^{-1}) = (n\varphi^*(h,\varphi^*(h^{-1},n^{-1})), hh^{-1})$$
$$= (n\varphi^*(\underbrace{hh^{-1}}_{e_H},n^{-1}), e_H) = (nn^{-1},e_H) = (e_N,e_H)$$

ja
$$(\varphi^*(h^{-1},n^{-1}),h^{-1})*(n,h) = (\varphi^*(h^{-1},n^{-1})\varphi^*(h^{-1},n), h^{-1}h)$$
$$= (\varphi^*(h^{-1},\underbrace{n^{-1}n}_{=e_N}), h^{-1}h) = (e_N,e_H).$$

koska $\varphi^*(h^{-1},\cdot)$ on homomorfismi

(iv) $\iota : (n,h) \longmapsto (\varphi^*(h^{-1},n^{-1}),h^{-1})$ on jatkuva, ok.
$\mu : ((n,h),(n',h')) \longmapsto (n\varphi^*(h,n'), hh')$ on jatkuva, ok.

(v) Koska N ja H ovat T_1-avaruuksia, on $N\times H$ T_1-avaruus:
jos $(n,h)\in N\times H$, on

$$\{(n,h)\} = \underbrace{N\times\underbrace{\{h\}}_{\subseteq H}}_{\subseteq N\times H} \cap \underbrace{\underbrace{\{n\}}_{\subseteq N}\times H}_{\subseteq N\times H} \quad \text{suljettu } (N\times H)\text{:ssa.}$$

$\square$

b) Seuraa Lauseesta 1.29, koska $\tilde{N}$ on homomorfismin q ydin.

$\square$

2. Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd} N \rtimes H \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ N \rtimes H/\tilde{N} \arrow[r, dashed, "\tilde{q}"'] & H \end{tikzcd}$$

missä $q(n,h) = h$ kuten Lauseessa 1.29, ja p on projektio tekijäryhmälle.
Lauseen 1.29 nojalla q on surjektiivinen homomorfismi, joten ryhmien homomorfialauseen [Metsänkylä-Näätänen, Algebra, s. 81] nojalla q indusoi isomorfismin $\tilde{q} : N \rtimes H/\tilde{N} \to H$, $\tilde{q}((n,h)\tilde{N}) = q(n,h) = h$;
eli y.o. kaavio kommutoi: $\tilde{q} \circ p = q$.
Koska q on jatkuva, on $\tilde{q}$ jatkuva Lemman 1.18 nojalla (p on tekijäkuvaus).
On vielä osoitettava, että $\tilde{q}^{-1}$ on jatkuva.
Tark. kaaviota

$$\begin{tikzcd} N \rtimes H \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & N \rtimes H/\tilde{N} \\ H \arrow[ur, "\tilde{q}^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Kaavio kommutoi, koska

$$\tilde{q} \circ p = q \Rightarrow \tilde{q}^{-1} \circ \tilde{q} \circ p = \tilde{q}^{-1} \circ q \Rightarrow p = \tilde{q}^{-1} \circ q .$$

Projektio $q : N \times H \to H$ on avoin kuvaus [Väisälä, Top. II, s. 57], joten se on tekijäkuvaus [Väisälä, Lause 8.9, s. 63].
Koska p on jatkuva, seuraa $\tilde{q}^{-1}$:n jatkuvuus taas Lemmasta 1.18.

$\square$

3. väite. ei ole halkeava

tod. Antiteesi: $\exists$ homomorfismi $s : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ s.e. $p \circ s = id_{\mathbb{Z}_2}$.
Siis $p \circ s$ on injektio, joten s on oltava injektio. Lisäksi $s(\bar{0}) = 0$.
Nyt kuitenkin

$$0 = s(\bar{0}) = s(\bar{1}+\bar{1}) = s(\bar{1}) + s(\bar{1}) = 2 \cdot s(\bar{1}),$$

josta saadaan $s(\bar{1}) = 0$, RR injektiivisyyden kanssa.

$\square$

Jos $\mathbb{Z}$:lla olisi esitys $2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$, saataisiin Esim. 1.33 3):n nojalla halkeava jono $1 \to 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ RR äsken osoitetun nojalla.
Siis $\mathbb{Z}$ ei voida esittää muodossa $2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

$\square$

4. Tarkastellaan jonoa
$$1 \longrightarrow Sl(n,\mathbb{R}) \overset{i}{\hookrightarrow} Gl(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^* \longrightarrow 1,$$
joka on eksakti:

- i on injektio ok
- $\mathrm{im}(i) = Sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} = \ker(\det)$.
- det on surjektio:
  olk. $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mielivaltainen. Merk. $A_x = \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}$,
  jolloin $\det(A_x) = x \neq 0$ eli $A_x \in Gl(n,\mathbb{R})$.
- det on homomorfismi, koska $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Määr. vielä
$$s : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R})$$
$$x \longmapsto A_x.$$

- s on jatkuva, ok.
- s on homomorfismi:
$$s(xy) = \begin{pmatrix} xy & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} = s(x)\cdot s(y)$$
- $\det \circ s = id_{\mathbb{R}^*}$, koska $\det(A_x) = x$.

Siis jono on halkeava, ja $\overbrace{\text{väite}}^{\text{ensimmäinen}}$ seuraa Teoreemasta 1.34.
Isomorfismi $\gamma: Sl(n,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^* \to Gl(n,\mathbb{R})$ on $(A,x) \mapsto As(x)$. Nyt $\gamma(\widetilde{Sl(n,\mathbb{R})}) = Sl(n,\mathbb{R})$,
ja saadaan isomorfismit
$$Gl(n,\mathbb{R})/Sl(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} Sl(n,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*/\widetilde{Sl(n,\mathbb{R})} \xrightarrow[1.31]{\cong} \mathbb{R}^*.$$
$\square$

5. a) $\det(P) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$

Lisäksi
$$P^t P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
joten $P \in SO(2)$.
Geometrinen tulkinta: tason kierto origon ympäri vastapäivään kulman φ verran, kts. esim. [Honkasalo: Lin. alg., s. 87].

b) Merk. $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

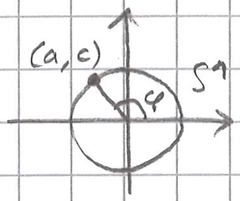
Nyt $P^t P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

joten saadaan yhtälöt
$$\begin{cases} a^2+c^2 = 1 & (1) \\ ab+cd = 0 & (2) \\ b^2+d^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Cramerin säännön nojalla [Honkasalo: Lin.algr., s. 118]

$$P^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det(P)}_{=1}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \text{ joka siis on } = P^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Tästä nähdään, että $d = a$ ja $c = -b$.



Koska $a^2 + c^2 = 1$, on olemassa $\varphi \in \mathbb{R}$ s.e. $a = \cos\varphi$ ja $c = \sin\varphi$.

Koska nyt $d = a$, $c = -b$, niin

$$P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

6. "$\Rightarrow$" Jos $\langle e^{i\alpha} \rangle$ on äärellinen, on välttämättä $(e^{i\alpha})^k = 1$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $e^{ik\alpha} = 1$ eli $k\alpha = 2n\pi$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Siis $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{2n}{k} \in \mathbb{Q}$.

"$\Leftarrow$" Jos $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, on $\alpha = \frac{m\pi}{n}$ ja

$$(e^{i\alpha})^{2n} = e^{i\frac{m\pi}{n}\cdot 2n} = (\underbrace{e^{2\pi i}}_{=1})^m = 1.$$

Eksponenteilla $\geq 2n$ saadaan samoja lukuja kuin eksponenteilla $0, \ldots, 2n-1$. Samoin negatiivisilla eksponenteilla, koska tässä $(e^{i\alpha})^{-k} = e^{i\alpha(2n-k)}$.

Siis $\langle e^{i\alpha} \rangle = \{ (e^{i\alpha})^0, \ldots, (e^{i\alpha})^{2n-1} \}$ on äärellinen. $\square$