Transf. ryhmät
Harj. 2
Ratkaisuja.

1. **ol.** $U \subseteq_{\circ} \bar{X} \times \bar{X}'$

v. $(f \times g)(U) \subseteq_{\circ} Y \times Y'$

tod. olk. $(y, y') \in (f \times g)(U)$, jolloin $\exists\ (x, x') \in U$ s.e. $f(x) = y$, $g(x') = y'$.
On olemassa avoimet ympäristöt $x \in V$, $x' \in V'$ s.e. $V \times V' \subset U$.
Nyt $f(V) \subseteq_{\circ} Y$ ja $g(V') \subseteq_{\circ} Y'$, koska f ja g ovat avoimia kuvauksia.
Lisäksi $f(V) \times g(V') \subseteq_{\circ} Y \times Y'$. Nyt $f(V) \times g(V')$ on pisteen (y, y') ympäristö ja $f(V) \times g(V') = (f \times g)(V \times V') \subset (f \times g)(U)$.
Siis $(f \times g)(U)$ sisältää mielivaltaisen pisteensä jonkin ympäristön, eli se on avoin.

$\square$

2. Merk. $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cap U^{-1})^n$. Os. ensin, että V on G:n aliryhmä:

- selvästi $e \in V$, koska $e \in U \cap U^{-1}$.
- jos $x, y \in V$, on $x = x_1 \cdots x_k$ ja $y = y_1 \cdots y_l$, missä $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l \in U \cap U^{-1}$.
  Nyt $(x_1 \cdots x_k)(y_1 \cdots y_l) \in (U \cap U^{-1})^{k+l} \subset V$.
- Joukko $U \cap U^{-1}$ on symmetrinen (jos $g \in U \cap U^{-1}$, on $g = u_1 = u_2^{-1}$, missä $u_1, u_2 \in U$. Silloin $g^{-1} = u_2 = u_1^{-1}$, joten $g^{-1} \in U \cap U^{-1}$).
  Jos $x = x_1 \cdots x_k \in V$ (missä $x_1 \cdots x_k \in U \cap U^{-1}$), on $x^{-1} = x_k^{-1} \cdots x_1^{-1}$. Koska $U \cap U^{-1}$ on symmetrinen, on $x_k^{-1}, \ldots, x_1^{-1} \in U \cap U^{-1}$, joten $x^{-1} \in (U \cap U^{-1})^k \subset V$. $\square$ aliryhmä

Harj. 1/Teht. 4 a) nojalla on $(U \cap U^{-1})^2 = (U \cap U^{-1})(U \cap U^{-1})$ avoin ja induktiolla saadaan, että $(U \cap U^{-1})^n$ on avoin $\forall n$.
Siis V on avoin G:ssä.

Siis V on G:n avoin aliryhmä, joten Lauseen 1.11 nojalla se on myös suljettu.

Koska G on yhtenäinen, tämä on mahdollista vain jos $V = G$.

Koska $V \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, on myös $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n = G$.

$\square$

3. Olkoon U e:n ympäristö s.e. $\bar{U}$ on kompakti.
Koska μ on jatkuva, on $\bar{U}^2 = \mu(\bar{U}\times\bar{U})$ kompakti. Induktiolla saadaan, että $\bar{U}^n$ on kompakti $\forall n \in \mathbb{N}$.
Edellisen tehtävän nojalla
$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bar{U})^n \subset G,$$
joten
$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bar{U})^n,$$ kompaktien joukkojen numeroituva yhdiste. □

4. ol. G lok. kompakti top. ryhmä, H sulj. aliryhmä
v1. H on lok. kompakti top. ryhmä
TOD. Tiedämme, että H on top. ryhmä (Harj. 1/Teht. 6).
Lokaali kompaktisuus seuraa [Väisälä, Top. II, Lause 17.5]:
Lokaalisti kompaktin Hausdorffin avaruuden (G) suljettu osajoukko (H) on lokaalisti kompakti.
v2. G/H on lokaalisti kompakti. | olk. $gH \in G/H$ ja
TOD. olk. $\pi: G \to G/H$ projektio, olk. U g:n ympäristö G:ssä, jonka sulkeuma $\bar{U}$ on kompakti.
Koska π on avoin kuvaus, on $\pi(U)$ avoin eli se on gH:n ympäristö.
Lisäksi
$$\overline{\pi(U)} \subset \overline{\pi(\bar{U})} = \pi(\bar{U}).$$
selvä
koska $\bar{U}$ on kompakti ja π jatkuva, on $\pi(\bar{U})$ kompakti ja siis myös suljettu, koska G/H on Hausdorffin avaruus.
Siis $\overline{\pi(U)}$ on kompakti, koska se on kompaktin joukon $\pi(\bar{U})$ suljettu osajoukko.
$\pi(U)$ on siis etsitty ympäristö.
v3. Jos H on sulj. normaali aliryhmä, niin tekijäryhmä G/H on lok. kompakti.
TOD. Seuraa suoraan v2:sta.
□

5. ol. X, Y top. avaruuksia, $f: X \to Y$ samastuskuvaus;
Y ja jokainen $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, ovat yhtenäisiä
v. X on yhtenäinen.
tod. vastaoletus: X on epäyhtenäinen, eli on olemassa $U, V \subset X$ s.e. $U, V \neq \emptyset$, $U \cup V = X$ ja $U \cap V = \emptyset$.
Kaksi mahdollisuutta: $fU \cap fV = \emptyset$ tai $fU \cap fV \neq \emptyset$.

5. jatk.

1) $fU \cap fV = \emptyset$.
Tällöin $f^{-1}fU = U$: aina $U \subset f^{-1}fU$; jos $x \in f^{-1}fU$, on siis $f(x) \in fU$ eli $f(x) \notin fV$, josta seuraa $x \notin V$ eli $x \in U$.
Samoin $f^{-1}fV = V$.
Joukot fU ja fV ovat siis avoimia (koska f on samastuskuvaus ja näiden joukkojen alkukuvat ovat avoimia).
Koska f on surj., on $fU \cup fV = Y$. Selvästi $fU, fV \neq \emptyset$, joten saadaan, että Y on epäyhtenäinen RR.

2) $fU \cap fV \neq \emptyset$.
Olk. $y \in fU \cap fV$.
Tutkitaan X:n aliavaruutta $A = f^{-1}(y)$.
Nyt $U \cap A$ ja $V \cap A$ muodostavat avaruuden A esityksen, ne ovat lisäksi avoimia A:ssa. Koska $y \in fU \cap fV$, on $U \cap A \neq \emptyset$ ja $V \cap A \neq \emptyset$. Siis A on epäyhtenäinen RR.

Molemmat vaihtoehdot johtivat ristiriitaan, joten X on yhtenäinen. $\square$

6. Koska G on lokaalisti yhtenäinen, on olemassa e:n yhtenäinen ympäristö U. Koska G_0 on e:n sisältävä yhtenäinen komponentti, on siis $U \subset G_0$.
Olk. $xG_0 \in G/G_0$ mielivaltainen.
Nyt $l_x U$ on avoin ja $l_x U \subset xG_0$. Koska π on avoin kuvaus, on $\pi(l_x U) = \{xG_0\}$ avoin.
Siis jokainen yksiö on avoin G/G_0:issa eli G/G_0:in topologia on diskreetti. $\square$

7. väite: $\pi(U \cap \pi^{-1}(Y)) = \pi(U) \cap Y$

<u>tod.</u> "$\subset$" $y \in \pi(U \cap \pi^{-1}(Y)) \Rightarrow \exists\, x \in U \cap \pi^{-1}(Y)$ s.e. $\pi(x) = y$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Koska } x \in U \text{, niin } y = \pi(x) \in \pi(U)\\ \text{ja koska } x \in \pi^{-1}Y \text{, niin } y = \pi(x) \in Y\end{array}\right\} \Rightarrow y \in \pi(U) \cap Y$$

"$\supset$" $y \in \pi(U) \cap Y$. Val. $x \in U$ s.e. $\pi(x) = y \in Y$.
Nyt $x \in U \cap \pi^{-1}Y$, joten $y \in \pi(U \cap \pi^{-1}(Y))$. $\square$