Transformaatioryhmät
Harj. 1 (15. 9. 2016)

Huom! Laskuharjoituksista saa lisäpisteitä tenttiin:
30% ⇝ 1 lisäpiste, 40% ⇝ 2, ..., 80% ⇝ 6 lisäpistettä.

1. Osoita, että $(\mathbb{R}^n, +)$ ja $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ovat topologisia ryhmiä.

2. a) Osoita, että $\det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on jatkuva.
   b) Osoita, että $G\ell(n, \mathbb{R})$ on topologinen ryhmä.

3. Olk. G äärellinen topologinen ryhmä. Osoita, että G:n topologia on diskreetti.

4. a) Olk. G topologinen ryhmä, $A \subset G$ ja $\mathcal{O} \Subset G$.
   Osoita, että $A\mathcal{O} \Subset G$ ja $\mathcal{O}A \Subset G$.

   b) Esim. $(\mathbb{R}^2, +)$:ssa $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja $\mathcal{O} = B(\bar{0}, 1) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$
   Mitä ovat $A\mathcal{O}$ ja $\mathcal{O}A$?

5. Topologisen ryhmän G osajoukkoa A sanotaan <u>symmetriseksi</u>,
   jos $A^{-1} = A$.
   a) Anna joitakin esimerkkejä $(\mathbb{R}^2, +)$:n symmetrisistä osajoukoista.
   b) Osoita: Jos $A \subset G$, niin AA^{-1} ja $A^{-1}A$ ovat symmetrisiä.
   c) Osoita, että jokainen e:n ympäristö sisältää symmetrisen ympäristön.

6. Osoita, että H_{relG} on topologinen ryhmä (jos $H \leq G$).

7. a) Osoita, että $G\ell(n, \mathbb{R})$ ei ole kompakti (helppo)
   b) Osoita, että $\mathcal{O}(n)$ on kompakti (vaikeampi)
   Vihje: Ehdosta $A^{\#}A = I$ voidaan osoittaa, että matriisin alkiot ovat itseisarvoltaan ≤ 1.