Transformationryhmät
Harj. 1
Ratkaisuja.

1. a) $(\mathbb{R}^n, +)$

- $\mathbb{R}^n$ on metrinen avaruus ja siis T_1
- $\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  $$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
  Jatkuvuus seuraa [Väisälä, Top. I, luku 5] tuloksista: projektiot jatkuvia, yhteenlasku jatkuva, komponenttifunktiot jatkuvia.
- $\iota : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  $$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (-x_1, \dots, -x_n).$$
  Jatkuvuus seuraa samoin [Väisälä, Top. I, luku 5]; tarvitaan: vakiolla kertominen jatkuva.

b) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, kts. esim. [Kankaanpää, Diff. Int. I, 2, s. 121 –].

- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ metrinen avaruus ja siis T_1
- $\mu : \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$
  $$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$
  Jatkuvuus taas Top. I tuloksista.
- $\iota : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$
  $$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$
  Jatkuvuus taas Top. I tuloksista (huom. nimittäjä $\neq 0$, koska $(x, y) \neq (0, 0)$).

2. a) $\beta : \mathbb{R}^{n^2} \xrightarrow[\approx]{\alpha^{-1}} M(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$ (α kuten luennolla)

Funktio β voidaan esittää käyttämällä projektioita sekä yhteen- ja kertolaskua. Siis β on jatkuva, joten myös $\det = \beta \circ \alpha$ on jatkuva.

b)
- $GL(n, \mathbb{R})$ on metrinen avaruus, koska se on $\subset M(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$; siis T_1-ehto on voimassa
- Matriisien tulon jokainen komponentti saadaan yhteen- ja kertolaskulla alkuperäisten matriisien koordinaateista, siis tulon jatkuvuus on ok.

2 b) jatkuu

- $\iota : Gl(n, \mathbb{R}) \to Gl(n, \mathbb{R})$ jatkuva ?
$A \longmapsto A^{-1}$

Kts. esim. [Honkasalo: Lin. alg. I, s. 118]

$A^{-1} = [c_{ij}]$, missä

$$c_{ij} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} \det(A_{ji}),$$

missä A_{ji} on A:n alimatriisi (A:sta poistettu j:s rivi ja i:s sarake).
Siis jokainen komponentti $c_{ij} \in \mathbb{R}$ saadaan käyttämällä projektioita ja determinanttia, joka on jatkuva funktio. Lisäksi $\det(A) \neq 0$, koska $A \in Gl(n, \mathbb{R})$.
Siis funktion ι jokainen komponenttifunktio on jatkuva, joten ι on jatkuva.

□

3. Koska G on T_1, on jokainen yksiö suljettu. Toisaalta, jos $A \subset G$ on mielivaltainen, on $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$, eli äärellinen yhdiste suljetuista joukoista, siis A on suljettu.
Siis jokainen G:n osajoukko on suljettu, joten jokainen G:n osajoukko on avoin eli G:n topologia on diskreetti.

□

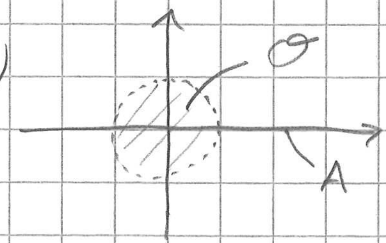
4. a) ol. G top. ryhmä, $A \subset G$, $\Theta \circledcirc G$
v. $A\Theta \circledcirc G$, $\Theta A \circledcirc G$.
tod.

$$A\Theta = \bigcup_{a \in A} a\Theta \quad \text{ja} \quad \Theta A = \bigcup_{a \in A} \Theta a .$$

Koska $\Theta \circledcirc G$, niin $a\Theta = l_a(\Theta) \circledcirc G$, koska l_a on homeomorfismi Lemman 1.4. nojalla.
Vastaavasti $\Theta a = r_a(\Theta) \circledcirc G$.
Siis $A\Theta$ ja ΘA ovat yhdisteitä avoimista joukoista, eli avoimia.

□

b)



$$A\mathcal{O} = \bigcup_{\bar{x}\in A} \bar{x}+\mathcal{O}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<y<1\}.$$

Tässä $\mathcal{O}A = A\mathcal{O}$, koska laskutoimitus on vaihdannainen.

5. a) Osajoukko $A\subset\mathbb{R}^2$ on symmetrinen, jos $(x,y)\in A \Rightarrow (-x,-y)\in A$.
Esimerkkejä:
$\emptyset$
$\mathbb{R}^2$
$B(\bar{0},r) = \{(x,y) \mid x^2+y^2<r\}$, $r>0$.
$\{(x,y) \mid xy=0\}$

b) V. AA^{-1} symmetrinen (eli $AA^{-1} = (AA^{-1})^{-1}$)
Tod. "$\subset$" Olk. $xy^{-1}\in AA^{-1}$ $(x,y\in A)$.
Nyt
$$xy^{-1} = (\underbrace{yx^{-1}}_{\in AA^{-1}})^{-1} \in (AA^{-1})^{-1}.$$
"$\supset$" Olk. $(xy^{-1})^{-1}\in(AA^{-1})^{-1}$ $(x,y\in A)$.
Nyt
$$(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}\in AA^{-1}. \quad \square$$
Joukko $A^{-1}A$ vastaavasti.

c) Olk. U mielivaltainen e:n ympäristö.
Lemman 1.8 nojalla $\exists$ e:n ympäristö W s.e. $WW^{-1}\subset U$.
b)-kohdan nojalla WW^{-1} on symmetrinen, joten se on etsitynlainen ympäristö.
$\square$

(Myös $U\cap U^{-1}$ on e:n symmetrinen ympäristö)

6. Väite. H_{relG} on topologinen ryhmä, jos G on top. ryhmä ja $H\leq G$.
Tod.
- T_1 on perinnöllinen ominaisuus [Top. II, Lause 11.9], joten H on T_1.
(Olk. $h\in H$. Koska G on T_1, on $\{h\}\subset G$, eli $G\setminus\{h\}\Subset G$.
Tällöin $(G\setminus\{h\})\cap H \Subset H$ eli $H\setminus\{h\}\Subset H$. Siis $\{h\}\Subset H$).
- Olk. $\mu: G\times G\to G$ G:n laskutoimitus; siis μ on jatkuva.
Luennolla mainittujen tulosten nojalla $\mu| : (H\times H)_{rel(G\times G)} \to G$ on jatkuva. Koska $H\leq G$, on $\mu(H\times H)\subset H$ ja saadaan funktio $\underbrace{H_{relG}\times H_{relG} = (H\times H)_{rel(G\times G)} \xrightarrow{\mu|} H_{relG}}_{\text{tämä on H:n laskutoimituksen määrittelevä funktio.}}$, joka myös on jatkuva.

6 jatk.

- $\iota : G \to G$ on jatkuva, joten $\iota| : H_{\text{rel}\,G} \to G$ on jatkuva. Koska $H \leq G$, on $\iota(H) \subset H$ ja saadaan funktio
$$H_{\text{rel}\,G} \to H_{\text{rel}\,G}$$
joka myös on jatkuva.

$\square$

7. a) $\forall k \in \mathbb{N}$ on $\begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix} \in Gl(n, \mathbb{R})$, koska $\begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/k \end{pmatrix}$.
Näitä matriiseja vastaava $\mathbb{R}^{n^2}$:n osajoukko on selvästi rajoittamaton, joten joukko $\alpha(Gl(n,\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ on rajoittamaton ja siis epäkompakti.
Koska α on homeomorfismi, on myös $Gl(n,\mathbb{R})$ epäkompakti.

b) Jos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, on siis $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

ja matriisin AA^T diagonaalialkiot ovat
$a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2, \; \dots, \; a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2$.
Nämä kaikki ovat $= 1$, ja summat koostuvat ei-negatiivisista luvuista, joten mikään summattavista luvuista ei voi olla > 1.
Siis $a_{ij}^2 \leq 1 \quad \forall i,j$, joten $-1 \leq a_{ij} \leq 1 \quad \forall i,j$.
Siis $\alpha(\mathcal{O}(n)) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ on rajoitettu.

Määrittelimme $\mathcal{O}(n) = \{ A \in Gl(n,\mathbb{R}) \mid A^t A = I \}$.
Olisi voitu myös määritellä $\mathcal{O}(n) = \{ A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A^t A = I \}$, koska mikään ei-kääntyvä matriisi ei voi toteuttaa $A^t A = I$ (koska ei-kääntyvälle matriisille on $\det A = 0$, jolloin olisi $0 = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(AA^T) = \det(I) = 1$ RR).

Määr. $\overline{\varphi} : M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow M(n,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow M(n,\mathbb{R})$
$$A \longmapsto (A, A^T) \longmapsto AA^T,$$

$\overline{\varphi}$ on jatkuva ja $\mathcal{O}(n) = \overline{\varphi}^{-1}(\{I\}) \in M(n,\mathbb{R})$
Siis $\alpha(\mathcal{O}(n)) \in \mathbb{R}^{n^2}$.

$\alpha(\mathcal{O}(n))$ on siis suljettu ja rajoitettu $\mathbb{R}^{n^2}$:n osajoukko, joten se on kompakti.
Koska α on homeomorfismi, on $\mathcal{O}(n)$ kompakti.

$\square$