Transformaatioryhmät
Harj. 13. Ratkaisuja.

1. Olk. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ vahvoja kuvauksia.
Jos $C \Subset X$, on $f(C) \Subset Y$, koska f on suljettu ja
$(g \circ f)(C) = g(f(C)) \Subset Z$, koska g on suljettu. Siis $g \circ f$ on suljettu.

Jos $z \in Z$, niin $K = g^{-1}(z)$ on kompakti, koska g on vahva.
Harj. 9/Teht. 1 nojalla vahvalle kuvaukselle pätee, että kompaktin joukon alkukuva on kompakti, joten $f^{-1}(K)$ on kompakti.
Siis $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(K)$ on kompakti.
□

2. Olk. $x \in X$, $y \in \overline{Gx}$ ja U y:n ympäristö s.e. $\overline{G(U|U)}$ on kompakti.
Riittää osoittaa, että $y \in Gx$.
Merk. $D = \{ V \mid V$ y:n ympäristö, $V \subset U \}$, joka on suunnattu joukko, kun määr. $V \geq W \iff V \subset W$.
Jos määr. verkko $\varphi : D \to U$ s.e. jokaisella $V \in D$ valitaan $\varphi(V) \in V \cap Gx$, niin $\varphi \to y$.
(valinta aina mahdollista, koska $y \in \overline{Gx}$)
Valitaan ryhmän G alkiot g_V s.e. $\varphi(V) = g_V x$. Siis erityisesti $g_U x \in U$, ja jokaisella V pätee
$$(g_V g_U^{-1})(g_U x) = g_V x \in V \subset U.$$
Siis $g_V g_U^{-1} \in G(U|U) \quad \forall V$.
Koska $\overline{G(U|U)}$ on kompakti on verkolla $(g_V g_U^{-1})_V$ suppeneva osaverkko $(g_W g_U^{-1})_W \to g$ ja $(g_W) \to g g_U$.
Nyt $y = \lim g_V x = \lim g_W x = g g_U x \in Gx$.
□

3. "$\Rightarrow$" Ol. että X on Hausdorff ja $\varphi : D \to X$ on verkko.
Jos $s, t \in X$, $s \neq t$, ja U, V ovat näiden pisteiden erilliset ympäristöt, niin verkko φ ei voi olla lopulta sekä U:ssa että V:ssä. Siis verkko voi supeta korkeintaan yhtä pistettä kohti.

"$\Leftarrow$" Ol. että $\overline{X}$ ei ole Hausdorff; olk. $s, t \in \overline{X}$ pisteet, joilla ei ole erillisiä ympäristöjä.
Olk. $\mathcal{U}_s$ pisteen s ympäristöjen kokoelma ja $\mathcal{U}_t$ pisteen t ymp. kokoelma. Tulojoukko $\mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t$ on suunnattu joukko, kun määritellään

$$(T, U) \geq (V, W) \iff T \subset V \text{ ja } U \subset W.$$

Jokaisella $(T, U) \in \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t$ leikkaus $T \cap U$ on epätyhjä; määritellään verkko $\varphi : \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t \to \overline{X}$ valitsemalla jokaisella (T, U) jokin piste joukosta $T \cap U$.
Olk. nyt $(T_0, U_0) \in \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t$ mielivalt. ja $(T, U) \geq (T_0, U_0)$.
Tämä tarkoittaa, että $T \subset T_0$ ja $U \subset U_0$, joten

$$\varphi(T, U) \in T \cap U \subset T_0 \cap U_0 .$$

Siis verkko φ on lopulta jokaisessa s:n ympäristössä T_0 ja jokaisessa t:n ympäristössä U_0 eli φ suppenee sekä pistettä s että pistettä t kohti.

$\square$

4. Osoitetaan: Jos $p : \overline{X} \to Y$ on vahva', niin
$id \times p : B \times \overline{X} \to B \times Y$ on suljettu.
(Oletetaan: kaikki avaruudet Hausdorff)

Tod. Olk. $A \Subset B \times C$
Väite. $(id \times p)(A) \Subset B \times Y$.
Olkoon $(b, y) \in \overline{(id \times p)(A)}$, jolloin on olemassa verkko (b_j, y_j) joukossa $(id \times p)(A)$ s.e. $(b_j, y_j) \to (b, y)$.
Jokaisella j valitaan $x_j \in \overline{X}$ s.e. $(id \times p)(b_j, x_j) = (b_j, y_j)$ ja $(b_j, x_j) \in A$.
Koska $y_j \to y$ ja p on vahva', niin B.12 $\Rightarrow$ verkolla (x_j) on kasautumisarvo, ja siis osaverkko, joka suppenee, $x_i \to x \in \overline{X}$.
Nyt $\underbrace{(b_i, x_i)}_{\in A} \longrightarrow (b, x) \in A$, koska A on suljettu.

Siis $$\underbrace{(id \times p)(b_i, x_i)}_{= (b_i, y_i)} \longrightarrow (b, p(x)) = (id \times p)\underbrace{(b, x)}_{\in A}$$

$$(b_i, y_i) \longrightarrow (b, y)$$

joten $(b, y) \in (id \times p)(A)$, mikä todistaa väitteen.

$\square$

5. Osoitetaan ensin, että joukot

$$\{ d(hx, gy) \mid h, g \in G \} \quad \text{ja} \quad \{ d(x, gy) \mid g \in G \}$$

ovat samat:

"$\supset$" selvä (val. $h = e$)

"$\subset$" $d(\bar{h}x, \bar{g}y) \underset{\substack{\uparrow \\ G\text{-inv.}}}{=} d(\bar{h}^{-1}\bar{h}x, \bar{h}^{-1}\bar{g}y) = d(x, \bar{h}^{-1}\bar{g}y) \in \{ d(x, gy) \mid g \in G \}$.

Siis $D(Gx, Gy) = \inf \{ d(x, gy) \mid g \in G \}$.

(M1)

$$\begin{aligned} D(Gx, Gz) &= \inf \{ d(x, gz) \mid g \in G \} \\ &\overset{(1)}{\leq} \inf \{ d(x, hy) + d(hy, gz) \mid h, g \in G \} \\ &\overset{(2)}{=} \inf \{ d(x, hy) + d(y, h^{-1}gz) \mid h, g \in G \} \\ &\overset{(3)}{=} \inf \{ d(x, hy) + d(y, kz) \mid h, k \in G \} \\ &= D(Gx, Gy) + D(Gy, Gz). \end{aligned}$$

(1): koska $\forall h, g \in G$: $d(x, hy) + d(hy, gz) \geq d(x, gz)$

(2): koska d on G-invariantti

(3): Joukot $\{ d(x, hy) + d(y, h^{-1}gz) \mid h, g \in G \}$ ja $\{ d(x, hy) + d(y, kz) \mid h, k \in G \}$ ovat samat.

(M2) symmetrisyys selvä, koska d symmetrinen

(M3) Jos $Gx = Gy$, niin $x = gy$ joll. g, jolloin $d(x, gy) = 0$ ja $D(Gx, Gy) = 0$.

Olk. $Gx \neq Gy$ eli $x \notin Gy$. Nyt tehtävän 2 nojalla $Gy \in \underline{X}$, joten x:llä on ymp. $B(x, r)$ s.e. $B(x, r) \cap Gy = \emptyset$. Siis $d(x, gy) \geq r \;\; \forall g$, jolloin $D(Gx, Gy) = \inf \{ d(x, gy) \mid g \in G \} \geq r > 0$.

Siis D on metriikka.

Os. vielä, että D määrää X/G:n tekijätopologian, t.s. jos merkitään τ_D = metriikan D antama topologia, ja τ tekijätopologia, niin osoitetaan, että

$$\mathrm{id} : (X/G, \tau_D) \to (X/G, \tau)$$

on homeomorfismi.

Merk. $\pi : (X, d) \to (X/G, \tau_D)$.

Nyt selvästi $D(\pi(x), \pi(y)) \le d(x,y) \quad \forall x, y \in X$, mistä seuraa, että π on jatkuva.

Os. sitten, että π on avoin kuvaus osoittamalla, että

$$\pi(B_d(x,r)) = B_D(\pi(x), r):$$

"$\subset$" selvä, koska $d(x,y) < r \Rightarrow D(\pi(x), \pi(y)) < r$

"$\supset$" olk. $D(\pi(x), \pi(y)) = r^* < r$.

Koska $D(\pi(x), \pi(y)) = \inf\{ d(x, gy) \mid g \in G \}$,

ei voi olla $d(x, gy) \ge r \; \forall g$, joten $\exists\, g_0$ s.e. $d(x, g_0 y) < r$.

Siis $g_0 y \in B_d(x,r)$ ja

$$\pi(y) = \pi(g_0 y) \in \pi(B_d(x,r)).$$

Kaaviossa

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\bar{\pi}"] & \\ (X/G, \tau_D) \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & (X/G, \tau) \end{tikzcd}$$

id on jatkuva, koska $\bar{\pi}$ on jatkuva ja π on avoimena kuvauksena tekijäkuvaus.

Kaaviossa

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\bar{\pi}"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ (X/G, \tau) \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & (X/G, \tau_D) \end{tikzcd}$$

id on jatkuva, koska π on jatkuva ja $\bar{\pi}$ on tekijäkuvaus.

Siis id on homeomorfismi, mikä todistaa väitteen.