

# Transformaatio ryhmät

## Harj. 13. Ratkaisuja.

1. Olk.  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  vahva' kuvauksia.

Jos  $C \in X$ , on  $f(C) \in Y$ , koska  $f$  on suljettu ja  $(g \circ f)(C) = g(f(C)) \in Z$ , koska  $g$  on suljettu. Siis  $g \circ f$  on suljettu.

Jos  $z \in Z$ , niin  $K = g^{-1}(z)$  on kompakti, koska  $g$  on vahva'. Harj. 9/Teht. 1 nojalla vahva' kuvaukselle pätee, että kompaktin joukon alkukuva on kompakti, joten  $f^{-1}(K)$  on kompakti.

Siis  $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(K)$  on kompakti.  $\square$

2. Olk.  $x \in X$ ,  $y \in \overline{Gx}$  ja  $U$  y:n ympäristö s.e.  $\overline{G(U|U)}$  on kompakti.

Riittää osoittaa, että  $y \in Gx$ .

Merk.  $D = \{V \mid V \text{ y:n ympäristö, } V \subset U\}$ , jolle on suunnattu joukko, kun määr.  $V \geq W \Leftrightarrow V \subset W$ .

Jos määr. verkko  $\varphi: D \rightarrow U$  s.e. jokaisella  $V \in D$  valitaan  $\varphi(V) \in V \cap Gx$ , niin  $\varphi \rightarrow y$ .

$\leftarrow$  (valinta aina mahdollista, koska  $y \in \overline{Gx}$ )

Valitaan ryhmän  $G$  alkio  $g_V$  s.e.  $\varphi(V) = g_V x$ . Siis erityisesti  $g_U x \in U$ , ja jokaisella  $V$  pätee

$$(g_V g_U^{-1})(g_U x) = g_V x \in V \subset U.$$

Siis  $g_V g_U^{-1} \in G(U|U) \forall V$ .

Koska  $\overline{G(U|U)}$  on kompakti on verkolla  $(g_V g_U^{-1})_V$  suppeneva osaverkko  $(g_W g_U^{-1})_W \rightarrow g$  ja  $(g_W) \rightarrow g g_U$ .

Nyt  $y = \lim g_V x = \lim g_W x = g g_U x \in Gx$ .  $\square$

3. " $\Rightarrow$ " Ol. että  $X$  on Hausdorff ja  $\varphi: D \rightarrow X$  on verkko.

Jos  $s, t \in X$ ,  $s \neq t$ , ja  $U, V$  ovat näiden pisteiden erilliset ympäristöt, niin verkko  $\varphi$  ei voi olla lopulta sekä  $U$ :ssa että  $V$ :ssä. Siis verkko voi supeta korkeintaan yhteen pisteeseen kohti.

" $\Leftarrow$ " Ol. että  $\mathbb{R}$  ei ole Hausdorff; olk.  $s, t \in \mathbb{R}$  pisteet, joilla ei ole erillisiä ympäristöjä.

Olk.  $\mathcal{U}_s$  pisteen  $s$  ympäristöjen kokoelma ja  $\mathcal{U}_t$  pisteen  $t$  ymp. kokoelma. Tulojoukko  $\mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t$  on suunnattu joukko, kun määritellään

$$(T, U) \geq (V, W) \Leftrightarrow T \subset V \text{ ja } U \subset W.$$

Jokaisella  $(T, U) \in \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t$  leikkaus  $T \cap U$  on epätyhjä; määritellään verkko  $\varphi: \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t \rightarrow \mathbb{R}$  valitsemalla

jokaisella  $(T, U)$  jokin piste joukosta  $T \cap U$ .

Olk. nyt  $(T_0, U_0) \in \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_t$  mielivalt. ja  $(T, U) \geq (T_0, U_0)$ .

Tämä tarkoittaa, että  $T \subset T_0$  ja  $U \subset U_0$ , joten

$$\varphi(T, U) \in T \cap U \subset T_0 \cap U_0.$$

Siis verkko  $\varphi$  on lopulta jokaisessa  $s$ :n ympäristössä  $T_0$  ja jokaisessa  $t$ :n ympäristössä  $U_0$ , eli  $\varphi$  suppenee sekä pisteellä  $s$  että pisteellä  $t$  tohti.

□

4. Osoitetaan: Jos  $p: \mathbb{R} \rightarrow Y$  on vahva, niin  $\text{id} \times p: B \times \mathbb{R} \rightarrow B \times Y$  on suljettu.

(Oletetaan: kaikki avaruudet Hausdorff)

Tod. Olk.  $A \in B \times C$

väite.  $(\text{id} \times p)(A) \in B \times Y$ .

olkaan  $(b, y) \in (\text{id} \times p)(A)$ , jolloin on olemassa verkko

$(b_j, y_j)$  joukossa  $(\text{id} \times p)(A)$  s.e.  $(b_j, y_j) \rightarrow (b, y)$ .

Jokaisella  $j$  valitaan  $x_j \in \mathbb{R}$  s.e.  $(\text{id} \times p)(b_j, x_j) = (b_j, y_j)$

ja  $(b_j, x_j) \in A$ .

Koska  $y_j \rightarrow y$  ja  $p$  on vahva, niin B.12  $\Rightarrow$

verkolla  $(x_j)$  on kasautumisarvo, ja siis osaverkko,

joka suppenee,  $x_j \rightarrow x \in \mathbb{R}$ .

Nyt  $(\underbrace{b_j, x_j}_{\in A}) \rightarrow (b, x) \in A$ , koska  $A$  on suljettu.

Siis  $(\text{id} \times p)(\underbrace{b_j, x_j}_{\in A}) \rightarrow (b, p(x)) = (\text{id} \times p)(\underbrace{b_j, x_j}_{\in A})$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & (b_j, y_j) \rightarrow (b, y) \end{aligned}$$

joten  $(b, y) \in (\text{id} \times p)(A)$ , mikä todistaa väitteen. □

5. Osoitetaan ensin, että joukot

$$\{d(hx, gy) \mid h, g \in G\} \quad \text{ja} \quad \{d(x, gy) \mid g \in G\}$$

ovat samat:

" $\supset$ " selvä (val.  $h=e$ )

$$\begin{aligned} \text{" $\subset$ " } \quad d(\bar{h}x, \bar{g}y) &= d(\bar{h}^{-1}\bar{h}x, \bar{h}^{-1}\bar{g}y) = d(x, \bar{h}^{-1}\bar{g}y) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad G\text{-inv.} \end{aligned} \in \{d(x, gy) \mid g \in G\}.$$

Siis  $D(Gx, Gy) = \inf \{d(x, gy) \mid g \in G\}.$

$$\begin{aligned} (M1) \quad D(Gx, Gz) &= \inf \{d(x, gz) \mid g \in G\} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \inf \{d(x, hy) + d(hy, gz) \mid h, g \in G\} \\ &\stackrel{(2)}{=} \inf \{d(x, hy) + d(y, h^{-1}gz) \mid h, g \in G\} \\ &\stackrel{(3)}{=} \inf \{d(x, hy) + d(y, kz) \mid h, k \in G\} \\ &= D(Gx, Gy) + D(Gy, Gz). \end{aligned}$$

(1): Koska  $\forall h, g \in G : d(x, hy) + d(hy, gz) \geq d(x, gz)$

(2): Koska  $d$  on  $G$ -invariantti

(3): Joukot  $\{d(x, hy) + d(y, h^{-1}gz) \mid h, g \in G\}$  ja  $\{d(x, hy) + d(y, kz) \mid h, k \in G\}$  ovat samat.

(M2) symmetrisyys selvä, koska  $d$  symmetrinen

(M3) Jos  $Gx = Gy$ , niin  $x = gy$  joll.  $g$ , jolloin  $d(x, gy) = 0$  ja  $D(Gx, Gy) = 0$ .

Olk.  $Gx \neq Gy$  eli  $x \notin Gy$ . Nyt tehtävän 2 nojalla  $Gy \in \mathbb{R}$ , joten  $x$ illä on ymp.  $B(x, r)$  s.e.  $B(x, r) \cap Gy = \emptyset$ . Siis  $d(x, gy) \geq r \forall g$ , jolloin  $D(Gx, Gy) = \inf \{d(x, gy) \mid g \in G\} \geq r > 0$ .

Siiis  $D$  on metriikka.

Os. vielä, että  $D$  määrittää  $\mathbb{Z}/G$  in tekijätopologia, t.s. ja merkitään  $\tau_D =$  metriikan  $D$  antama topologia, ja  $\tau$  tekijätopologia, niin osoitetaan, että

$$\text{id}: (\mathbb{Z}/G, \tau_D) \rightarrow (\mathbb{Z}/G, \tau)$$

on homeomorfismi.

Merki:  $\pi: (\mathbb{Z}, d) \rightarrow (\mathbb{Z}/G, \tau_D)$ .

Nyt selvästi  $D(\pi(x), \pi(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$ , mistä seuraa, että  $\pi$  on jatkuva.

Os. sitten, että  $\pi$  on avoin kuvaus osoittamalla, että

$$\pi(B_d(x, r)) = B_D(\pi(x), r):$$

" $\subset$ " selvä, koska  $d(x, y) < r \Rightarrow D(\pi(x), \pi(y)) < r$

" $\supset$ " olk.  $D(\pi(x), \pi(y)) = r^* < r$ .

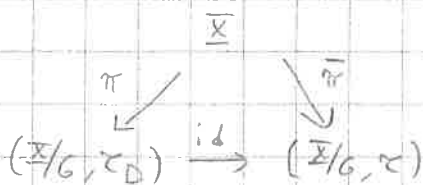
Koska  $D(\pi(x), \pi(y)) = \inf \{d(x, gy) \mid g \in G\}$ ,

eivä voi olla  $d(x, gy) \geq r \quad \forall g$ , joten  $\exists g_0$  s.e.  $d(x, g_0 y) < r$ .

Siiis  $g_0 y \in B_d(x, r)$  ja

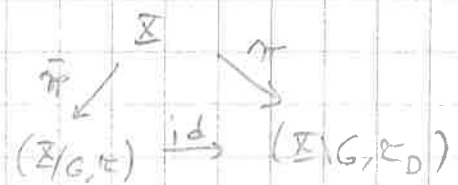
$$\pi(y) = \pi(g_0 y) \in \pi(B_d(x, r)).$$

Kaaviossa



$\text{id}$  on jatkuva, koska  $\bar{\pi}$  on jatkuva ja  $\pi$  on avoimena kuvauksena tekijäkuvauus.

Kaaviossa



$\text{id}$  on jatkuva, koska  $\pi$  on jatkuva ja  $\bar{\pi}$  on tekijäkuvauus.

Siiis  $\text{id}$  on homeomorfismi, mikä todistaa väitteen.