Transf. ryhmät

Harj. 12

Ratkaisuja.

1. ol. S on H-ydin $\mathcal{X}$:ssä, eli on olemassa G-kuvaus $f: GS \to G/H$ s.e. $f^{-1}(eH) = S$.

a) $S \Subset GS$ selvä, koska S = pisteen alkukuva

b) S on H-invariantti: jos $s \in S$ ja $h \in H$, on $f(hs) \overset{f\ G\text{-ekviv.}}{=} hf(s) \overset{s\in S}{=} h \cdot eH = eH$, joten $hs \in f^{-1}(eH) = S$.

c) "$\supset$": jos $h \in H$ ja $s \in S$, on b):n nojalla $hs \in S$ eli $h \in G(S|S)$

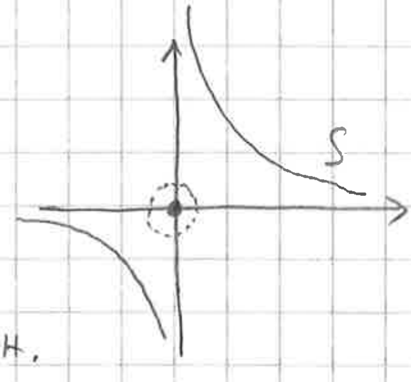
"$\subset$": jos $g \in G(S|S)$, niin $\exists\ s_1, s_2 \in S$ s.e. $gs_1 = s_2$.
Nyt $eH = f(s_2) = f(gs_1) = gf(s_1) = g(eH) = gH$, josta seuraa $g \in H$.

d) Koska G on lokaalisti kompakti, on G/H lok. komp.
Olkoon U' eH:n ympäristö G/H:ssa, $\overline{U'}$ kompakti.
Koska H on kompakti, on projektio $\pi: G \to G/H$ vahva kuvaus, joten $A = \pi^{-1}(\overline{U'}) \subset G$ on kompakti.
Määritellään $V = f^{-1}(U') \Subset GS$, S:n ympäristö GS:ssä.
Os. että $\overline{G(V|V)}$ on kompakti:

olk. $g \in G(V|V)$ eli $\exists\ v_1, v_2 \in V$ s.e. $gv_1 = v_2$.
Nyt $v_1 = g_1 s_1$, $v_2 = g_2 s_2$ joillakin $g_1, g_2 \in G$, $s_1, s_2 \in S$.
Koska $V = f^{-1}(U')$, on siis $f(v_1), f(v_2) \in U'$; toisaalta $f(v_1) = f(g_1 s_1) = g_1 f(s_1) = g_1(eH) = g_1 H$, joten $g_1 H \in U'$ eli $g_1 \in \pi^{-1}(U') \subset A$. Vastaavasti $g_2 \in A$.
Jos nyt $gv_1 = v_2$, saadaan $gg_1 s_1 = g_2 s_2 \Rightarrow g_2^{-1} g g_1 s_1 = s_2$
$\Rightarrow g_2^{-1} g g_1 \in G(S|S) \overset{c)}{=} H \Rightarrow g \in g_2 H g_1^{-1} \subset AHA^{-1}$.
Siis $G(V|V) \subset AHA^{-1}$, joka on kompakti ja siten $\overline{G(V|V)}$ on kompakti.

$\square$

2. Val. $G = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $H = \{e\}$,
toiminta $(t, (x,y)) \mapsto (x+t, y)$.



$S = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$,
jolloin $GS = \mathbb{R}^2$, ja $S \Subset GS$.
Selvästi S on H-invariantti ja lisäksi,
jos $t \neq 0$, on $tS \cap S = \emptyset$, eli $G(S|S) = H$.
Siis ehdot a) – c) ovat voimassa.
Jos V on mikä tahansa S:n ympäristö, se sisältää kiekon $B(\bar{0}, \varepsilon)$ ja selvästi $G(B(\bar{0},\varepsilon) \mid S)$ on rajoittamaton. Siis myös $G(V|V)$ on rajoittamaton, eli $\overline{G(V|V)}$ ei ole kompakti. $\square$

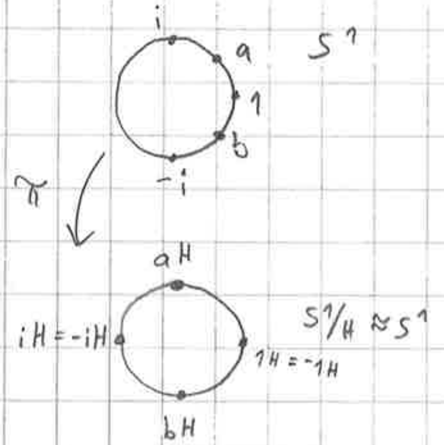
3. a)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[dr, "pr"] \arrow[d, "\pi"'] & \\ \mathbb{R}^2/H \arrow[r, "\sigma"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x,y) \arrow[dr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \\ (x,y)+H \arrow[r, mapsto] & (x,0) \end{tikzcd}$$

- σ hyvin määr. : jos $(x',y') \in (x,y)+H$, on $(x',y') = (x,y)+(0,t) = (x,y+t)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, jolloin $\sigma(x',y') = (x,0) = \sigma(x,y)$ ok.
- σ jatkuva, koska pr jatkuva ja π tekijäkuvaus.
- Selvästi $\pi \circ \sigma = id$.

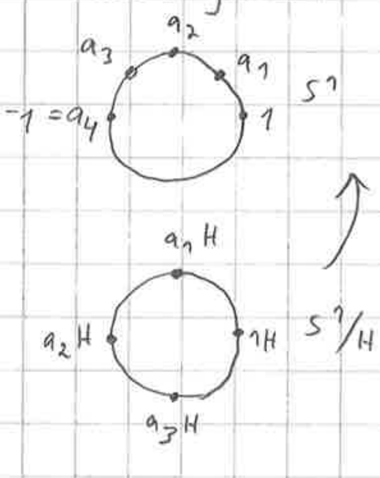
Siis σ on globaali sektio.

b) Tässä $S^1/H \approx S^1$



Valitaan $\sigma(1H) = 1$, ja ympäristöksi U pisteen $1H$ sisältävä pisteiden aH ja bH välinen kaari.
Jos $\forall\ xH \in U$ valitaan $\sigma(xH)$ = "se $\pi^{-1}(xH)$:n piste, joka sijaitsee y-akselin oik. puolella", saadaan jatkuva funktio $\sigma : U \to S^1$.
Tämä on lokaali sektio.

Ei ole olemassa globaalia sektiota:



Antiteesi: σ globaali sektio

Jos val. $\sigma(1H) = 1$, niin jatkuvuuden nojalla on oltava $\sigma(a_1H) = a_1$, jne. $\sigma(a_2H) = a_2$, $\sigma(a_3H) = a_3$ ja $\sigma(1H) = a_4$, mutta tämä on ristiriita, koska $\sigma(1H) = 1$.
Vastaava ristiriita saataisiin myös, jos alunperin valittaisiin $\sigma(1H) = -1$.
Siis globaalia sektiota ei ole olemassa.

$\square$

4. a) Olk. $a \in X$ mielivaltainen.
Val. a:n ympäristö U s.e. $I = \{ j \in J \mid U \cap A_j \neq \emptyset \}$ on äärellinen.
Nyt

$$U \cap A = U \cap \bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} U \cap A_j = \bigcup_{j \in I} U \cap A_j = U \cap \bigcup_{j \in I} A_j \Subset U,$$

koska $\bigcup_{j \in I} A_j \Subset X$ äärell. yhdisteenä suljetuista joukoista.

Siis $U \cap A^c \Subset U \Subset X$. Jokaisella pisteellä on siis ympäristö, jossa A^c on avoin, joten $A^c \Subset X$ ja $A \Subset X$.

$\square$

b) Olk. $B \Subset Y$.

$$\text{Nyt } f^{-1}B = \bigcup_{j \in J} (f^{-1}B \cap A_j) = \bigcup \underbrace{(f|A_j)^{-1}B}_{}$$

$\Subset A_j \Subset A$, koska $f|A_j$ on jatkuva

Perhe $((f|A_j)^{-1}B)$ on lok. äärellinen,
koska $(f|A_j)^{-1}B \subset A_j \ \forall j$ ja
perhe (A_j) on lok. äärellinen.
Siis $f^{-1}B$ on yhdiste lok. äärellisestä perheestä sulj. joukkoja,
joten a) $\Rightarrow f^{-1}B \Subset A$. Siis f on jatkuva.

$\square$

5. Olk. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ avaruuden X avoin peite.
Oletuksen mukaan löytyy siihen sopiva ykkösen ositus $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$.
Jokaisella $\alpha \in A$ määritellään

$$V_\alpha = h_\alpha^{-1}(]0,1]) = \{ x \in X \mid h_\alpha(x) \neq 0 \}.$$

(Siis $spt(h_\alpha) = \overline{V_\alpha}$)
Osoitetaan, että joukot V_α, $\alpha \in A$, muodostavat peitteen $\{U_\alpha\}$ avoimen lok. äärellisen tihennyksen:

- joukot V_α muodostavat peitteen, koska $\forall x \ \exists \ \alpha_x$ s.e. $h_{\alpha_x}(x) > 0$ (koska $\sum h_\alpha(x) = 1$). Siis $x \in V_{\alpha_x}$.
- $V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} = spt(h_\alpha) \subset U_\alpha$, joten $\{V_\alpha\}$ on $\{U_\alpha\}$:n tihennys.
- joukot V_α ovat avoimia, koska h_α on jatkuva ja $]0,1] \Subset [0,1]$.
- perhe (V_α) on lok. äärellinen, koska $V_\alpha \subset spt(h_\alpha) \ \forall \alpha$ ja perhe $(spt(h_\alpha))$ on lok. äärellinen.

$\square$

6. Koska $\mathbb{X}$ on Hausdorff, myös A on Hausdorff.
Olk. $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ avaruuden A avoin peite. Jokaisella $i \in I$ valitaan $V_i \circledcirc \mathbb{X}$ s.e. $V_i \cap A = U_i$. Merk. $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$.
Nyt $\mathcal{V} \cup \{\mathbb{X} \setminus A\}$ on $\mathbb{X}$:n avoin peite, joten sillä on lokaalisti äärellinen avoin tihennys $\mathcal{W}' = (W_j')_{j \in J}$ ($\mathbb{X}$:n parakompaktisuuden nojalla).
Määr.

$$\mathcal{W} = \{ W_j' \cap A \mid j \in J \},$$

joka on selvästi A:n avoin peite.
Lokaali äärellisyys on myös selvä, koska $W_j' \cap A \subset W_j'$ ja perhe $(W_j')_{j \in J}$ on lok. äärellinen.
Os. vielä, että $\mathcal{W}$ on $\mathcal{U}$:n tihennys;
jos $j \in J$, niin $W_j' \subset V_i$ jollakin $i \in I$ tai $W_j' \subset \mathbb{X} \setminus A$.
Jos $W_j' \subset \mathbb{X} \setminus A$, niin $W_j' \cap A = \emptyset$;
jos taas $W_j' \subset V_i$, niin $W_j' \cap A \subset V_i \cap A = U_i$.
Siis joka tapauksessa $W_j' \cap A \subset U_i$ jollakin i.

$\square$