

Transformaatioyhtymät

Harij. 11 (7.12.2016)

1. (Luennot, s. 86)

Osoita, että $\tilde{\varphi}: G \times (G \times_H \mathbb{X}) \rightarrow G \times_H \mathbb{X}$
 $(g', [g, x]) \mapsto [g'g, x]$

on hyvin määritelty jatkuva toiminta.

2. Todista Lause 5.2.

3. (Luennot, s. 89)

Olk. G top. ryhmä, H, K G :n aliryhmiä ja $H \subset K$; \mathbb{X} H -avaruus.

Osoita, että funktio $f: G \times_K (K \times_H \mathbb{X}) \rightarrow G \times_H \mathbb{X}$
 $[g, [k, x]] \mapsto [gk, x]$, $g \in G, k \in K, x \in \mathbb{X}$,

on hyvin määritelty jatkuva G -kuvaus.

4. Olk. $G = (S^1, \cdot) \subset (C \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{+1, -1\} \leq G$;

$\mathbb{X} = [-1, 1]$, H :n toiminta $H \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

$(t, x) \mapsto tx$.

Mikä tässä tilanteessa on $G \times_H \mathbb{X}$?

(T.s., minkä tutun avaruuden kanssa $G \times_H \mathbb{X}$ on homeomorfinen ja miltä G :n toiminta näyttää). Entä mikä on $G \times_H \mathbb{X}$, jos H :n toiminta \mathbb{X} :ssä on triviaali, $(t, x) \mapsto x$?

5. a) Osoita: Jos \mathbb{X} on G -avaruus, niin $G \times_G \mathbb{X}$ ja \mathbb{X} ovat G -homeomorfiset.

b) Jos H :n toiminta \mathbb{X} :ssä on triviaali, niin

$G \times_H \mathbb{X}$ ja $(G/H) \times \mathbb{X}$ ovat G -homeomorfiset (toiminta avaruudessa $(G/H) \times \mathbb{X}$:
 $\bar{g} \cdot (gH, x) = (\bar{g}gH, x)$).

Erityisesti jos \mathbb{X} on yksö $\{x_0\}$, niin $G \times_H \mathbb{X}$ ja G/H ovat G -homeomorfiset.

6. Olk. K, H G :n aliryhmiä, $H \subset K$.

Tällöin $f: G \times_K (K/H) \rightarrow G/H$
 $[g, kH] \mapsto gkH$

on G -homeomorfinen.